Pillau.

Ostern 1887—88.

Realprogymnasium.

Zu dem

öffentlichen Examen

am 27. März

ladet ergebenst ein

A. Zander,
Rektor.

Inhalt: 1. Lemniskatische Polarkoordinaten mit ihren Beziehungen zu den gewöhnlichen Polarkoordinaten und den rechtwinkligen Parallelkoordinaten. Von Hermann Gustav Schulz.
2. Schulnachrichten. Vom Rektor.

Königsberg.
Hartungsche Buchdruckerei.

1888. Progr. Nr. 25.

Lemniskatische Polarkoordinaten und ihr Zusammenhang mit den gewöhnlichen Polarkoordinaten und den rechtwinkligen Parallelkoordinaten.

I. Die Abbildung durch die Funktion $w = f(z)$ als Mittel zur Aufstellung neuer Koordinatensysteme.

Wenn u und v die Koordinaten eines Punktes $w = u + iv$ in der w-Ebene und x und y die Koordinaten eines Punktes $z = x + iy$ in der z-Ebene bedeuten, so wird durch jede Gleichung zwischen w und z

$$w = f(z)$$

der Zusammenhang eines Gebildes in der z-Ebene mit einem entsprechenden in der w-Ebene vermittelt, denn zu jedem Punkte $z = x + iy$ in der z-Ebene lässt sich durch jene Gleichung ein entsprechender Punkt $w = u + iv$ in der w-Ebene bestimmen, daher auch zu jeder Kurve in der z-Ebene eine entsprechende in der w-Ebene. Beide Gebilde sind in ihren kleinsten Teilen ähnlich. Dies ist die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

der notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, dass w eine Funktion der komplexen Variabeln z ist. In dem Werke G. Holzmüllers, „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaft und der konformen Abbildungen", findet sich eine ausführliche Behandlung dieser Abbildungen für die Fälle, dass $f(z)$ eine ganze oder gebrochene rationale Funktion, ein Logarithmus oder eine Exponentialfunktion, eine Kreisfunktion oder eine elliptische Funktion von z ist. Diese Abbildungen liefern das Mittel zur Aufstellung der verschiedenartigsten Koordinatensysteme und zur Erkenntnis ihres gegenseitigen Zusammenhanges.

Bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten x und y wird jeder Punkt P in der z-Ebene, dessen Koordinaten x_1 und y_1 sind, als Schnittpunkt der beiden zu den Achsen parallelen Geraden

$$x = x_1 \qquad \text{und} \qquad y = y_1$$

aufgefasst, bei Anwendung von Polarkoordinaten r und φ als Schnittpunkt eines Kreises $r = r_1$ um den Nullpunkt und der durch denselben Punkt gehenden Geraden $\varphi = \varphi_1$,

die gegen die positive x-Achse die Neigung φ_1 hat. Man stellt ihn dar im ersten Falle durch die komplexe Zahl $z = x_1 + iy_1$ und im zweiten Falle durch $z = r_1 e^{i\varphi_1}$. Sind x_1 und y_1 einerseits, r_1 und φ_1 andererseits variable Parameter, so sind

$$x = x_1 \qquad \text{und} \qquad y = y_1$$

zwei Scharen zu den Achsen paralleler Geraden, die das Koordinatennetz für rechtwinklige Koordinaten bilden, während

$$r = r_1 \qquad \text{und} \qquad \varphi = \varphi_1$$

eine Schar konzentrischer Kreise um den Nullpunkt und ein Büschel gerader Linien durch denselben darstellen, die das Koordinatennetz für Polarkoordinaten bilden.

Durch die Gleichung $w = f(z)$ lässt sich nun zu jeder Linie $x = x_1$ eine entsprechende Kurve in der w-Ebene und zu jeder Linie $y = y_1$ eine andere, die vorige rechtwinklig durchschneidende Kurve bestimmen, also zu den beiden Scharen paralleler Geraden zwei Scharen von Kurven in der w-Ebene, die das Koordinatennetz für eine neue Art von Koordinaten bilden, denn jeder Punkt der w-Ebene lässt sich nun als Schnittpunkt einer Kurve der ersten Schar mit einer der andern Schar bestimmen. Dasselbe gilt, wenn man von der Kreisschar $r = r_1$ und dem Geraden-Büschel $\varphi = \varphi_1$ in der z-Ebene ausgeht. Die Art der neuen Koordinaten hängt von der abbildenden Funktion $f(z)$ ab.

Hat man z. B. die Gleichung

$$w = \sin z$$

also

$$u + iv = \sin(x + iy)$$

so ergiebt sich, da

$$\sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$
$$= \sin x \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + i \cos x \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

ist, aus der Gleichsetzung der reellen resp. imaginären Teile auf beiden Seiten der Gleichung

$$u = \sin x \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$$

$$v = \cos x \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

Für $y = y_1$ hat man also nach Elimination von x

$$\frac{u^2}{\left(\frac{e^{y_1} + e^{-y_1}}{2}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{e^{y_1} - e^{-y_1}}{2}\right)^2} = 1$$

die Gleichung einer Ellipse, und für $x = x_1$ nach Elimination von y

$$\frac{u^2}{\sin^2 x_1} - \frac{v^2}{\cos^2 x_1} = 1$$

die Gleichung einer Hyperbel. Es entsprechen also den Parallelen zur x-Achse Ellipsen und den Parallelen zur y-Achse Hyperbeln. Die Figuren in der w-Ebene müssen in ihren kleinsten Teilen ähnlich sein denen in der z-Ebene; daher schneiden sich die Ellipsen und Hyperbeln ebenso unter rechten Winkeln wie die ihnen entsprechenden Geraden in

der z-Ebene, was auch daraus hervorgeht, dass beide Kurven dieselben Brennpunkte haben (Hattendorff, Analytische Geom. § 121).

Diese beiden Scharen konfokaler Kegelschnitte bilden nun das Koordinatennetz für elliptische Koordinaten, denn jeder Punkt P in der w-Ebene lässt sich als Schnittpunkt der beiden in ihm sich rechtwinklig schneidenden Kegelschnitte bestimmen. Ihre speziellen Parameter x_1 und y_1 würden die elliptischen Koordinaten des Punktes sein. Da aber x_1 und y_1 zugleich die Koordinaten des dem Punkte P in der z-Ebene entsprechenden Punktes sind, so giebt die Transformationsgleichung

$$u+iv = \sin(x+iy)$$

auch den Zusammenhang der elliptischen Koordinaten x und y des Punktes mit seinen rechtwinkligen Parallelkoordinaten u und v.

II. Herleitung der lemniskatischen Polarkoordinaten.

Wenn w eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades von z ist, also

$$w = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n$$

und

$$q_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu$$

die Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ sind, dann hat man

$$w = (z-q_1)(z-q_2)\ldots\ldots(z-q_n)$$

oder

$$u+iv = \{(x-\alpha_1)+i(y-\beta_1)\}\ldots\ldots\ldots\{(x-\alpha_n)+i(y-\beta_n)\}$$

daher

$$u-iv = \{(x-\alpha_1)-i(y-\beta_1)\}\ldots\ldots\ldots\{(x-\alpha_n)-i(y-\beta_n)\}$$

und

$$\sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{\{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2\}\ldots\ldots\ldots\{(x-\alpha_n)^2+(y-\beta_n)^2\}}$$

Die linke Seite der Gleichung ist die Entfernung r des Punktes $(u+iv)$ vom Anfangspunkt des Koordinatensystems, und $\sqrt{(x-\alpha_\nu)^2+(y-\beta_\nu)^2}$ ist die Entfernung p_ν des Punktes $(x+iy)$ von dem Punkte $(\alpha_\nu+i\beta_\nu)$, so dass die Gleichung in der einfacheren Form geschrieben werden kann

$$r = p_1 p_2 \ldots . p_n$$

Die Gleichung $r = a^n$, worin a eine positive Konstante bedeutet, ist die Gleichung eines Kreises mit dem Radius a^n um den Nullpunkt. Die durch die Gleichung $p_1 p_2 \ldots . p_n = a^n$ dargestellte Kurve, welche für den Fall $n = 2$ in eine gewöhnliche Lemniskate übergeht, nennt Holzmüller in seinem vorhin erwähnten Werke Lemniskate n^{ter} Ordnung. Ihre Brennpunkte $q_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu$ sind die Wurzelpunkte der Gleichung $f(z) = 0$

Es geht also durch die Transformation

$$w = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots\ldots + a_n$$

der Kreis $r = a^n$ um den Nullpunkt der w-Ebene über in eine Lemniskate n^{ter} Ordnung $p_1 p_2 \ldots p_n = a^n$ in der z-Ebene. Der Schar konzentrischer Kreise um den Nullpunkt entspricht eine Schar konfokaler Lemniskaten.

Ferner erhält man aus den beiden Gleichungen für $(u+iv)$ und $(u-iv)$

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{u+iv}{u-iv} = \frac{1}{2i}\lg\frac{(x-\alpha_1)+i(y-\beta_1)}{(x-\alpha_1)-i(y-\beta_1)} + \ldots + \frac{1}{2i}\lg\frac{(x-\alpha_n)+i(y-\beta_n)}{(x-\alpha_n)-i(y-\beta_n)}$$

da aber allgemein

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{m+in}{m-in} = \operatorname{arc\,tg}\frac{n}{m}$$

ist, so geht die Gleichung über in

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u} = \operatorname{arc\,tg}\frac{y-\beta_1}{x-\alpha_1} + \ldots . + \operatorname{arc\,tg}\frac{y-\beta_n}{x-\alpha_n}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist der Winkel φ, den der Radiusvector r des Punktes $(u+iv)$ mit der Abscissenachse bildet, und $\operatorname{arc\,tg}\frac{y-\beta_\nu}{x-\alpha_\nu}$ der Neigungswinkel ϑ_ν der Linie p_ν gegen die Abscissenachse, so dass man auch diese Gleichung in der einfacheren Form schreiben kann

$$\varphi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n$$

$\varphi = \gamma$ ist die Gleichung einer geraden Linie durch den Nullpunkt. Die durch die Gleichung $\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_n = \gamma$ dargestellte Kurve nennt Holzmüller, dem Fall $n = 2$ entsprechend, Hyperbel n^{ter} Ordnung.

Es geht also durch die Transformation

$$w = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots . + a_n$$

die gerade Linie $\varphi = \gamma$ in der w-Ebene über in die Hyperbel n^{ter} Ordnung $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n = \gamma$ in der z-Ebene. Dem Büschel von geraden Linien durch den Nullpunkt der einen Ebene entspricht ein Büschel von Hyperbeln n^{ter} Ordnung in der andern Ebene. — Vorhin wurde gezeigt, dass der Schar konzentrischer Kreise um den Nullpunkt der einen Ebene eine Schar konfokaler Lemniskaten in der andern entsprach. Da w eine Funktion der komplexen Variabeln z ist, so müssen die Figuren in der z-Ebene in ihren kleinsten Teilen den entsprechenden Figuren in der w-Ebene ähnlich sein, also je zwei entsprechende Kurven sich unter gleichen Winkeln schneiden. Nun schneiden offenbar die geraden Linien durch den Nullpunkt die konzentrischen Kreise um denselben überall rechtwinklig; dasselbe muss daher auch von den Hyperbeln und den Lemniskaten der z-Ebene gelten. Die Schar konfokaler Lemniskaten und das Büschel sie rechtwinklig durchschneidender Hyperbeln bilden das Koordinatennetz für die lemniskatischen Polarkoordinaten, denn jeder Punkt der z-Ebene kann nun aufgefasst werden als Schnittpunkt der Lemniskate $p_1 p_2 \ldots p_n = a^n$ und der Hyperbel $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n = \gamma$. Die Parameter a^n und γ dieser Kurven sind die lemniskatischen Polarkoordinaten des Punktes. Die Frage nun, wie diese Koordinaten mit den rechtwinkligen Parallelkoordinaten x und y und den gewöhnlichen Polarkoordinaten ϱ und α des Punktes P verbunden sind, findet ihre Beantwortung wieder durch die Bemerkung, dass sie zugleich die gewöhnlichen Polarkoordinaten des dem Punkte P in der w-Ebene entsprechenden Punktes $u+iv = a^n e^{i\gamma}$ sind.

Berechnet man also aus der Transformationsgleichung $w = a^n e^{i\gamma} = f(z)$ jetzt z als Funktion von a^n und γ, also $z = F(a^n e^{i\gamma})$, so hat man z durch seine lemniskatischen Polarkoordinaten bestimmt. Die Gleichung

$$x + iy = \varrho e^{i\alpha} = F(a^n e^{i\gamma})$$

vermittelt deshalb den Zusammenhang der verschiedenen Koordinaten mit einander. Die Lösung der Aufgabe kommt also auf die Lösung einer Gleichung n^{ten} Grades hinaus. Diese Bemerkung ist auch deshalb von Wichtigkeit, weil sie lehrt, dass, solange $f(z)$ den vierten Grad nicht übersteigt, man für x, y, ϱ und α geschlossene, wenn auch zunächst in imaginärer Form auftretende Ausdrücke wird erhalten können, die dann entsprechend zu reduzieren oder zu entwickeln sind.

Ein besonderes Interesse beanspruchen diejenigen Fälle, in denen die Brennpunkte der Lemniskatenschar ein reguläres n-Eck mit dem Koordinatenanfang als Mittelpunkt bilden. Die irregulären Lemniskaten und Hyperbeln gehen dann in reguläre Lemniskaten und Hyperbeln n^{ter} Ordnung über, und die Gleichung $f(z) = 0$ nimmt eine besonders einfache Form an. Nennt man nämlich die Brennpunktsradien, d. h. die Entfernung der Brennpunkte vom Nullpunkt, s und legt die Abscissenachse so, dass sie durch einen der n-Brennpunkte geht, so giebt die Gleichung

$$z_k = s e^{\frac{2 \varkappa i \pi}{n}}$$

wenn man darin für $\varkappa$ der Reihe nach die Werte

$$\varkappa = 1, 2, 3, \ldots n$$

setzt, sämtliche Brennpunkte. Sie sind also Wurzeln der Gleichung

$$z^n - s^n = 0$$

und die Transformationsgleichung $w = f(z)$ lautet dann

$$a^n e^{i\gamma} = z^n - s^n$$

Im Folgenden sollen diese Spezialfälle behandelt werden.

III. Lemniskatische Polarkoordinaten der zweiten Ordnung ($n = 2$).

Ehe man den analytischen Zusammenhang der verschiedenen Koordinaten untersucht, wird es zweckmässig sein, sich über die gegenseitige Lage der Lemniskaten und ihrer orthogonalen Trajektorien, der Hyperbeln zu unterrichten. Es soll dabei aber unter Hinweis auf die ausführliche Abhandlung von S. Hudler „die Cassinische Kurve" nur das Wichtigste hervorgehoben werden. Dabei mag bemerkt werden, dass in der besonderen Form der Transformationsgleichung noch keine Spezialisierung für den Fall $n = 2$, sondern nur die Annahme einer besonderen Lage des Koordinatensystems enthalten ist, denn nimmt man, von der allgemeinen Gleichung

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

ausgehend, die Verbindungslinie der beiden Wurzelpunkte zur Abscissenachse und ihre Mitte zum Nullpunkt, so sind

$$q_1 = +s \qquad \text{und} \qquad q_1 = -s$$

die Wurzeln der Gleichung, und sie selbst nimmt die Form an

$$(z-s)(z+s) = z^2 - s^2 = 0$$

so dass die Transformationsgleichung lautet

$$a^2 e^{i\gamma} = z^2 - s^2$$

Unter diesen Voraussetzungen nimmt die Gleichung der Lemniskate $p_1 p_2 = a^2$

oder
$$\{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2\}\{(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2\} = a^4$$

die Form an

$$\{(x+s)^2+y^2\}\cdot\{(x-s)^2+y^2\} = a^4$$

oder
$$(x^2+y^2)^2-2s^2(x^2-y^2) = a^4-s^4$$

Dies ist die Gleichung der Lemniskate in ihrer Normalform. Setzt man hierin

$$x = \varrho\cos\alpha$$

$$y = \varrho\sin\alpha$$

so erhält man die Polargleichung

$$\varrho^4 + s^4 - 2\varrho^2 s^2\cos 2\alpha = a^4$$

welche für $a = s$ übergeht in

$$\varrho^2 = 2s^2\cos 2\alpha$$

Dies ist die Polargleichung derjenigen Lemniskate der Schar, welche im Nullpunkt einen Doppelpunkt hat (Schleifenlemniskate), also die Gleichung der bevorzugten Lemniskate, die, wie später gezeigt wird, für die Orthogonalschar von Hyperbeln eine besondere Bedeutung hat.

Unter denselben Voraussetzungen über die Lage des Koordinatensystems wie vorhin nimmt die Gleichung der Hyperbel $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \gamma$ oder

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y-\beta_1}{x-\alpha_1} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y-\beta_2}{x-\alpha_2} = \gamma$$

die Form an

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x-s} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x+s} = \gamma$$

woraus folgt

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\dfrac{y}{x-s}+\dfrac{y}{x+s}}{1-\dfrac{y^2}{x^2-s^2}} = \frac{y(x+s)+y(x-s)}{x^2-s^2-y^2} = \frac{2xy}{x^2-y^2-s^2}$$

$$(x^2-y^2)\operatorname{tg}\gamma-2xy = s^2\operatorname{tg}\gamma$$

Dies ist die Mittelpunktsgleichung einer Schar gleichseitiger Hyperbeln.

Für $y = 0$ wird $x = \pm s$, d. h. sämtliche Hyperbeln der Schar gehen durch die Brennpunkte der Lemniskaten.

Für $x = 0$ wird $y = \pm is$, d. h. keine der Hyperbeln schneidet die Ordinatenachse. — Führt man durch die Gleichungen

$$x = \varrho\cos\alpha$$

$$y = \varrho\sin\alpha$$

Polarkoordinaten ein, so lautet die Hyperbelgleichung

$$\varrho^2(\cos 2\alpha\operatorname{tg}\gamma-\sin 2\alpha) = s^2\operatorname{tg}\gamma$$

oder
$$\varrho^2\sin(\gamma-2\alpha) = s^2\sin\gamma$$

Für $\varrho = \infty$ wird α der Neigungswinkel der Asymptoten; für ihn müsste sein

$$\sin(\gamma - 2\alpha) = 0$$

also

$$\gamma - 2\alpha = 0 \text{ oder } \pi$$

Daher ist entweder

$$\alpha_1 = \frac{\gamma}{2} \qquad \text{oder} \qquad \alpha_2 = \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{2}$$

Dies sind die Neigungswinkel der beiden sich rechtwinklig schneidenden Asymptoten. Die Hyperbelachse halbiert den Winkel zwischen den Asymptoten, hat also den Neigungswinkel

$$\delta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Statt γ könnte man nun auch δ als variabeln Parameter der Hyperbelschar einführen, was den Vorteil hätte, dass man eine einfache geometrische Bedeutung damit verbinden kann. Da

$$\gamma = 2\delta + \frac{\pi}{2} \qquad \text{und deshalb} \qquad \operatorname{tg}\gamma = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\delta}$$

ist, so würde die Hyperbelgleichung lauten

$$x^2 - y^2 + 2xy \operatorname{tg} 2\delta = s^2$$

oder in Polarkoordinaten

$$\varrho^2 \cos(2\alpha - 2\delta) = s^2 \cos 2\delta$$

Nennt man die Halbachse der Hyperbel h und ihre halbe Excentricität k, so wird, wenn α den Wert δ annimmt, $\varrho = h$ werden, und man hat

$$h^2 = s^2 \cos 2\delta = 2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 \cos 2\delta$$

$$k^2 = 2s^2 \cos 2\delta$$

Nun sind aber h und δ die Polarkoordinaten der Scheitelpunkte, k und δ die Polarkoordinaten der Brennpunkte der Hyperbeln. Die Gleichungen sind daher die Polargleichungen zweier Lemniskaten. Auf der einen liegen die Scheitelpunkte der Hyperbelschar, auf der andern die Brennpunkte, und man erkennt sofort, dass die letztere eine Lemniskate unserer Schar (Brennpunkte $\pm s$) und zwar die bevorzugte der Schar ist. Damit ist ein interessanter Zusammenhang zwischen der Schar konfokaler Lemniskaten und ihren orthogonalen Trajektorien, der Hyperbelschar, gegeben.

Nach diesen Betrachtungen über die geometrischen Eigenschaften der neuen Koordinaten sollen ihre Beziehungen zu den gewöhnlichen Koordinaten erörtert und zu dem Zwecke

1) die gewöhnlichen Polarkoordinaten ϱ und α des Punktes P und deren Differentiale,
2) seine rechtwinkligen Parallelkoordinaten x und y und deren Differentiale
3) die Leitstrahlen p_1 und p_2 nach den Brennpunkten der Lemniskaten und deren Neigungswinkel ϑ_1 und ϑ_2 gegen die positive Abscissenachse

als Funktionen der lemniskatischen Polarkoordinaten a^2 und γ des Punktes berechnet werden.

Da im Vorigen bereits die Gleichungen der Lemniskaten und Hyperbeln in den gewöhnlichen Koordinaten aufgestellt sind, so liegt es nahe, diese Gleichungen der weiteren Rechnung zu Grunde zu legen; doch ist es zweckmässiger, direkt von der Transformationsgleichung

$$a^2 e^{i\gamma} = z^2 - s^2$$

auszugehen. Diese liefert als quadratische Gleichung für z nur zwei Werte, also auch nur zwei Schnittpunkte der Lemniskate a^2 mit der Hyperbel γ. Die beiden noch fehlenden Punkte entsprechen offenbar dem zweiten Schnittpunkt des Kreises $r = a^2$ und der Geraden $\varphi = \gamma$ in der w-Ebene. Für diesen Punkt aber hat man zu setzen

$$w = a^2 e^{i(\gamma+\pi)} = -a^2 e^{i\gamma}$$

so dass sich aus der Gleichung

$$-a^2 e^{i\gamma} = z^2 - s^2$$

die beiden andern Schnittpunkte der Lemniskate und Hyperbel ergeben. Man erhält also für z die vier Werte

$$z = \pm\sqrt{s^2 \pm a^2 e^{i\gamma}}$$

Im Folgenden soll jedoch nur der Punkt

$$z = \sqrt{s^2 + a^2 e^{i\gamma}}$$

betrachtet werden.

1) Man hat also

$$z = \varrho e^{i\alpha} = \sqrt{s^2 + a^2 e^{i\gamma}}$$

oder $$\varrho^2 e^{2i\alpha} = s^2 + a^2 e^{i\gamma}$$

und daraus

$$\varrho^2 \cos 2\alpha = s^2 + a^2 \cos\gamma$$
$$\varrho^2 \sin 2\alpha = a^2 \sin\gamma$$

woraus endlich folgt

$$\varrho^4 = s^4 + 2a^2 s^2 \cos\gamma + a^4$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{a^2 \sin\gamma}{s^2 + a^2\cos\gamma}$$

Die Differentiation dieser beiden Gleichungen ergiebt

$$d\varrho = \frac{a(s^2\cos\gamma + a^2)}{\varrho^3}\, da - \frac{a^2 s^2 \sin\gamma}{2\,\varrho^3}\, d\gamma$$

$$d\alpha = \frac{a s^2 \sin\gamma}{\varrho^4}\, da + \frac{a^2(a^2 + s^2\cos\gamma)}{2\,\varrho^4}\, d\gamma$$

so dass man nach geringer Umformung für das Linienelement erhält

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\alpha^2 = \frac{a^2}{\varrho^2}\left\{da^2 + \frac{a^2}{4}\, d\gamma^2\right\}$$

In den Ausdrücken für $d\varrho$, $d\alpha$ und ds ist ϱ als Abkürzung für $\sqrt[4]{s^4+2a^2s^2\cos\gamma+a^4}$ gebraucht, was auch weiterhin der bequemeren Schreibweise und Übersicht wegen geschehen soll.

2) Wiederum von der Transformationsgleichung ausgehend, hat man

$$z = x+iy = \sqrt{s^2+a^2e^{i\gamma}}$$

$$x-iy = \sqrt{s^2+a^2e^{-i\gamma}}$$

$$2x = \sqrt{s^2+a^2e^{i\gamma}}+\sqrt{s^2+a^2e^{-i\gamma}}$$

$$2iy = \sqrt{s^2+a^2e^{i\gamma}}-\sqrt{s^2+a^2e^{-i\gamma}}$$

$$4x^2 = 2\varrho^2+(2s^2+2a^2\cos\gamma)$$

$$4y^2 = 2\varrho^2-(2s^2+2a^2\cos\gamma)$$

$$x\sqrt{2} = \sqrt{\varrho^2+(s^2+a^2\cos\gamma)}$$

$$y\sqrt{2} = \sqrt{\varrho^2-(s^2+a^2\cos\gamma)}$$

Das sind reelle, geschlossene Ausdrücke für x und y. Eine andere für die Rechnung freilich wenig geeignete Form dafür ergiebt sich aus den Werten

$$\varrho = (s^4+2a^2s^2\cos\gamma+a^4)^{\frac{1}{4}}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{a^2\sin\gamma}{s^2+a^2\cos\gamma}.$$

nämlich

$$x = \varrho\cos\alpha = \varrho\cos\left\{\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{a^2\sin\gamma}{s^2+a^2\cos\gamma}\right\}$$

$$y = \varrho\sin\alpha = \varrho\sin\left\{\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{a^2\sin\gamma}{s^2+a^2\cos\gamma}\right\}$$

Will man x und y in Reihen entwickeln, so kann man wieder von der Gleichung ausgehen

$$z = \sqrt{s^2+a^2e^{i\gamma}}$$

Man hat dabei zwei Fälle zu unterscheiden

1) $a < s$ wobei man $\frac{a^2}{s^2} = q$ setze $(q < 1)$

2) $a > s$ wobei man $\frac{s^2}{a^2} = p$ setze $(p < 1)$

Im ersten Falle ergiebt sich

$$z = s\sqrt{1+q\,e^{i\gamma}} = s\left\{1+\frac{1}{2}q\,e^{i\gamma}-\frac{1}{2\,.\,4}q^2e^{2i\gamma}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}q^3e^{3i\gamma}-\ldots\ldots\right\}$$

und daraus

$$x = s\left\{1+\frac{1}{2}q\cos\gamma-\frac{1}{2\,.\,4}q^2\cos 2\gamma+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}q^3\cos 3\gamma-\ldots\ldots\right\}$$

$$y = s\left\{\frac{1}{2}q\sin\gamma-\frac{1}{2\,.\,4}q^2\sin 2\gamma+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}q^3\sin 3\gamma-\ldots\ldots\ldots\right\}$$

im zweiten Falle

$$z = a\sqrt{e^{i\gamma}+p} = a\left\{e^{\frac{i}{2}\gamma}+\frac{1}{2}p\,e^{-\frac{i}{2}\gamma}-\frac{1}{2\,.\,4}p^2 e^{-\frac{3i}{2}\gamma}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}p^3 e^{-\frac{5i}{2}\gamma}-\ldots\ldots\right\}$$

und daraus

$$x = a\left\{\cos\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}p\cos\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2\,.\,4}p^2\cos\frac{3}{2}\gamma+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}p^3\cos\frac{5}{2}\gamma-\ldots\ldots\ldots\right\}$$

$$y = a\left\{\sin\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}p\sin\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2\,.\,4}p^2\sin\frac{3}{2}\gamma-\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}p^3\sin\frac{5}{2}\gamma+\ldots\ldots\ldots\right\}$$

Das Gesetz, nach dem diese Reihen fortschreiten, ist leicht zu erkennen. Für den Grenzfall $a = s$ kann man x und y auch direkt berechnen; dann ist nämlich

$$x+iy = s\sqrt{1+e^{i\gamma}} = s\,e^{\frac{i}{4}\gamma}\sqrt{e^{-\frac{i}{2}\gamma}+e^{+\frac{i}{2}\gamma}} = s\left(\cos\frac{\gamma}{4}+i\sin\frac{\gamma}{4}\right)\sqrt{2\cos\frac{\gamma}{2}}$$

also

$$x = s\cos\frac{\gamma}{4}\sqrt{2\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$y = s\sin\frac{\gamma}{4}\sqrt{2\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Zur Herleitung der Differentialien dx und dy hat man die Gleichungen

$$x+iy = \sqrt{s^2+a^2 e^{i\gamma}}$$

$$x-iy = \sqrt{s^2+a^2 e^{-i\gamma}}$$

deren Differentiation ergiebt

$$dx+idy = \frac{a\,e^{i\gamma}}{\sqrt{s^2+a^2 e^{i\gamma}}}\left(da+\frac{i}{2}a\,d\gamma\right)$$

$$dx-idy = \frac{a\,e^{-i\gamma}}{\sqrt{s^2+a^2 e^{-i\gamma}}}\left(da-\frac{i}{2}a\,d\gamma\right)$$

Durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen erhält man

$$ds^2 = dx^2+dy^2 = \frac{a^2}{\varrho^2}\left\{da^2+\frac{a^2}{4}d\gamma^2\right\}$$

den schon vorhin berechneten Wert, während sich durch Addition und Subtraktion nach gehöriger Reduktion ergiebt

$$dx = \frac{a}{\varrho^2\sqrt{2}}\sqrt{\varrho^2+(s^2\cos 2\gamma+a^2\cos\gamma)}\,da-\frac{a^2}{2\varrho^2\sqrt{2}}\sqrt{\varrho^2-(s^2\cos 2\gamma+a^2\cos\gamma)}\,d\gamma$$

$$dy = \frac{a}{\varrho^2\sqrt{2}}\sqrt{\varrho^2-(s^2\cos 2\gamma+a^2\cos\gamma)}\,da+\frac{a^2}{2\varrho^2\sqrt{2}}\sqrt{\varrho^2+(s^2\cos 2\gamma+a^2\cos\gamma)}\,d\gamma$$

Zur Reihenentwickelung für dx und dy bietet wieder die Gleichung

$$dx + i dy = \frac{a e^{i\gamma}}{\sqrt{s^2 + a^2 e^{i\gamma}}} \left(da + \frac{ia}{2} d\gamma \right)$$

ein geeignetes Mittel. Man hat wie bei der Entwickelung von x und y selbst zwei Fälle zu unterscheiden

1) $a < s$ wobei man $\frac{a^2}{s^2} = q$ setze $(q < 1)$

2) $a > s$ wobei man $\frac{s^2}{a^2} = p$ setze $(p < 1)$

Im ersten Falle ergiebt sich

$$dx + i dy = \frac{a}{s} e^{i\gamma} \left(da + \frac{ia}{2} d\gamma \right) (1 + q e^{i\gamma})^{-\frac{1}{2}} = q e^{i\gamma} \left(\frac{s}{a} da + \frac{is}{2} d\gamma \right) (1 + q e^{i\gamma})^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{s}{a} da + \frac{is}{2} d\gamma \right) \left\{ q e^{i\gamma} - \frac{1}{2} q^2 e^{2i\gamma} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} q^3 e^{3i\gamma} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} q^4 e^{4i\gamma} + \ldots\ldots \right\}$$

$$= \left(\frac{s}{a} da + \frac{is}{2} d\gamma \right) \left\{ C + i S \right\}$$

worin

$$C = q \cos\gamma - \frac{1}{2} q^2 \cos 2\gamma + \frac{1.3}{2.4} q^3 \cos 3\gamma - \frac{1.3.5}{2.4.6} q^4 \cos 4\gamma + \ldots\ldots$$

und

$$S = q \sin\gamma - \frac{1}{2} q^2 \sin 2\gamma + \frac{1.3}{2.4} q^3 \sin 3\gamma - \frac{1.3.5}{2.4.6} q^4 \cos 4\gamma + \ldots\ldots$$

ist. Dann wird

$$dx = \frac{s}{a} C da - \frac{s}{2} S d\gamma$$

$$dy = \frac{s}{a} S da + \frac{s}{2} C d\gamma$$

Im zweiten Fall erhält man

$$dx + i dy = e^{i\gamma} \left(da + \frac{ia}{2} d\gamma \right) \left(e^{i\gamma} + p \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(da + \frac{ia}{2} d\gamma \right) \cdot \left\{ e^{+\frac{i}{2}\gamma} - \frac{1}{2} p e^{-\frac{i}{2}\gamma} + \frac{1.3}{2.4} p^2 e^{-\frac{3i}{2}\gamma} - \frac{1.3.5}{2.4.6} p^3 e^{-\frac{5i}{2}\gamma} + \ldots \right\}$$

$$= \left(da + \frac{ia}{2} d\gamma \right) \left\{ C' + i S' \right\}$$

worin

$$C' = \left(1 - \frac{p}{2} \right) \cos\frac{\gamma}{2} + \frac{1.3}{2.4} p^2 \cos\frac{3}{2}\gamma - \frac{1.3.5}{2.4.6} p^3 \cos\frac{5}{2}\gamma + \ldots.$$

$$S' = \left(1 + \frac{p}{2} \right) \sin\frac{\gamma}{2} - \frac{1.3}{2.4} p^2 \sin\frac{3}{2}\gamma + \frac{1.3.5}{2.4.6} p^3 \sin\frac{5}{2}\gamma - \ldots.$$

und dann wird

$$dx = C' da - \frac{a}{2} S' d\gamma$$

$$dy = S' da + \frac{a}{2} C' d\gamma$$

Für den Grenzfall $a = s$ ergiebt sich direkt

$$dx + i dy = \frac{ise^{i\gamma}}{2\sqrt{1+e^{i\gamma}}} d\gamma = \frac{ise^{\frac{3}{4}i\gamma}}{2\sqrt{e^{-\frac{i\gamma}{2}} + e^{\frac{i\gamma}{2}}}} d\gamma = \frac{is\left(\cos\frac{3}{4}\gamma + i\sin\frac{3}{4}\gamma\right)}{2\sqrt{2\cos\frac{\gamma}{2}}} d\gamma$$

also

$$dx = -\frac{s.\sin\frac{3}{4}\gamma}{2\sqrt{2\cos\frac{\gamma}{2}}} d\gamma$$

$$dy = +\frac{s\cos\frac{3}{4}\gamma}{2\sqrt{2\cos\frac{\gamma}{2}}} d\gamma$$

3) Es erübrigt nun noch, die Leitstrahlen p_1 und p_2 nach den Brennpunkten der Lemniskaten und deren Neigungswinkel ϑ_1 und ϑ_2 gegen die positive Abscissenachse zu bestimmen. — Ihre Beziehungen zu den gewöhnlichen Koordinaten x und y, ϱ und α ergeben sich leicht aus der Figur. Die Linien p_1, ϱ und s sind Seiten eines Dreiecks, in welchem der Seite p_1 der Winkel α gegenüberliegt; daher ist

$$p_1{}^2 = \varrho^2 + s^2 - 2s\varrho\cos\alpha = \varrho^2 + s^2 - 2sx$$
$$= \varrho^2 + s^2 - s\sqrt{2}\sqrt{\varrho^2 + (s^2 + a^2\cos\gamma)}$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{y}{x-s} = \frac{\sqrt{\varrho^2 - (s^2 + a^2\cos\gamma}}{\sqrt{\varrho^2 + (s^2 + a^2\cos\gamma)} - s\sqrt{2}}$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$p_2{}^2 = \varrho^2 + s^2 + s\sqrt{2}\sqrt{\varrho^2 + (s^2 + a^2\cos\gamma)}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_2 = \frac{\sqrt{\varrho^2 - (s^2 + a^2\cos\gamma)}}{\sqrt{\varrho^2 + (s^2 + a^2\cos\gamma)} + s\sqrt{2}}$$

Auf rein algebraischem Wege gelangt man zu denselben Resultaten, wenn man bedenkt, dass p_1 und p_2 die Verbindungslinien des Punktes z mit den Punkten $\pm s$ sind. Man hat dann die Gleichungen

$$p_1 e^{i\vartheta_1} = z - s \qquad \text{und} \qquad p_2 e^{i\vartheta_2} = z + s$$

aus denen sich leicht das Weitere ergiebt.

Geht man auf die Reihenentwickelungen für x und y zurück, so kann man $tg\vartheta$ als Quotient zweier Reihen und p^2 als die Summe der Quadrate derselben beiden Reihen darstellen, denn es ist

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{y}{x-s} \qquad \operatorname{tg}\vartheta_2 = \frac{y}{x+s}$$

$$p_1^2 = (x-s)^2+y^2 \qquad p_2^2 = (x+s)^2+y^2$$

und für den Fall $\frac{a^2}{s^2} = q < 1$ z. B.

$$x-s = s\left\{\frac{1}{2}q\cos\gamma - \frac{1}{2.4}q^2\cos 2\gamma + \frac{1.3}{2.4.6}q^3\cos 3\gamma \ldots\ldots\right\}$$

$$y = s\left\{\frac{1}{2}q\sin\gamma - \frac{1}{2.4}q^2\sin 2\gamma + \frac{1.3}{2.4.6}q^3\sin 3\gamma \ldots\ldots\right\}$$

Ähnliches gilt auch für die andern Fälle.

IV. Reguläre lemniskatische Polarkoordinaten dritter Ordnung.

Die allgemeine Gleichung der Lemniskate dritter Ordnung hatte die Form

$$\left\{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2\right\}\left\{(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2\right\}\left\{(x-\alpha_3)^2+(y-\beta_3)^2\right\} = a^6$$

Für die reguläre Lemniskate dritter Ordnung sind die Brennpunkte

$$q_1 = \alpha_1+i\beta_1 = s$$

$$q_2 = \alpha_2+i\beta_2 = s\,e^{+\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{s}{2}(1-i\sqrt{3})$$

$$q_3 = \alpha_3+i\beta_3 = s\,e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{s}{2}(1+i\sqrt{3})$$

Durch Einsetzen dieser Werte gewinnt man sehr bald die Gleichung

$$\left\{(x^2+y^2+s^2)+s(x-y\sqrt{3})\right\}\left\{(x^2+y^2+s^2)+s(x+y\sqrt{3})\right\}\left\{(x^2+y^2+s^2)-2sx\right\} = a^6$$

nach weiterem Umformen

$$(x^2+y^2+s^2)^3-3s^2(x^2+y^2)(x^2+y^2+s^2)-2s^3x(x^2-3y^2) = a^6$$

und daraus endlich die Normalform

$$(x^2+y^2)^3+s^6-2s^3x(x^2-3y^2) = a^6$$

Führt man durch die Gleichungen

$$x = \varrho\cos\alpha$$

$$y = \varrho\sin\alpha$$

Polarkoordinaten ein, so wird

$$\varrho^6+s^6-2s^3\varrho^3\cos\alpha(\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha) = a^6$$

Da aber $\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha = \cos 3\alpha$

ist, so nimmt die Polargleichung die einfache Form an

$$\varrho^6+s^6-2s^3\varrho^3\cos 3\alpha = a^6$$

Auf ähnliche Weise würde man zur Gleichung der Hyperbel gelangen; doch ist dieser Weg umständlich. Deshalb sollen hier die Gleichungen beider Kurven noch nach

einer einfachen Methode entwickelt werden, die dazu den Vorteil hat, dass sie die weiteste Verallgemeinerung gestattet.

Die Transformationsgleichung

$$a^3 e^{i\gamma} = z^3 - s^3 \qquad \text{worin} \qquad z = \varrho^{i\alpha}$$

ist, zerfällt durch Trennen des Reellen vom Imaginären in zwei Gleichungen. Eliminiert man aus diesen beiden γ, so erhält man eine Gleichung zwichen a, ϱ und α, eliminiert man dagegen a, so ergiebt sich eine Gleichung zwischen γ, ϱ und α. Die erste dieser Gleichungen muss die der Lemniskate, die zweite die der Hyperbel sein. Sie ergeben sich auf folgende einfache Art:

Aus der Transformationsgleichung erhält man

$$a^3 \cos\gamma = \varrho^3 \cos 3\alpha - s^3$$

$$a^3 \sin\gamma = \varrho^3 \sin 3\alpha$$

Daraus ergiebt sich durch Quadrieren und Addieren beider Gleichungen

$$a^6 = \varrho^6 - 2s^3 \varrho^3 \cos 3\alpha + s^6$$

die schon vorhin aufgestellte Polargleichung für die reguläre Lemniskate dritter Ordnung.

Eliminiert man a, indem man die erste Gleichung mit $\sin\gamma$, die zweite mit $\cos\gamma$ multipliziert und dann die rechten Seiten einander gleichsetzt, so findet man

$$\varrho^3 (\cos 3\alpha \sin\gamma - \sin 3\alpha \cos\gamma) = s^3 \sin\gamma$$

oder

$$\varrho^3 \sin(\gamma - 3\alpha) = s^3 \sin\gamma$$

Dies ist die Polargleichung der regulären Hyperbel dritter Ordnung.

Bei der Diskussion beider Kurvengleichungen soll wieder nur das hervorgehoben werden, was zu einer allgemeinen Orientierung genügt; im übrigen sei auf die Figur verwiesen.

Aus der Form der beiden Gleichungen

$$\varrho^6 - 2s^3 \varrho^3 \cos 3\alpha + s^6 = a^6$$

$$\varrho^3 \sin(\gamma - 3\alpha) = s^3 \sin\gamma$$

geht zunächst hervor, dass beide Kurven drei durch den Mittelpunkt gehende Symmetrieachsen haben, die um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ gegen einander gedreht sind, denn eine Änderung des Winkels α um $\pm \frac{2\pi}{3}$ lässt die Gleichungen ungeändert.

Die Gleichung der Lemniskate geht für $a = s$ über in

$$\varrho^3 = 2s^3 \cos 3\alpha$$

Es ist die Schleifenlemniskate, welche im Nullpunkt einen dreifachen Punkt hat.

Für $\varrho = 0$ nämlich ist $\cos 3\alpha = 0$

also

$$\alpha = \frac{\pi}{6},\ \frac{3\pi}{6} \text{ oder } \frac{5\pi}{6}$$

Unter diesen Neigungswinkeln gegen die Abscissenachse gehen drei Züge der Kurve durch den Nullpunkt.

Für $\alpha = 0$ oder $\pm \frac{2\pi}{3}$ wird $\cos 3\alpha = 1$
darum sind die durch die Brennpunkte gehenden Radienvectoren Maxima.

Wenn a von s verschieden ist, so schreibe man die Gleichung der Lemniskate

$$\varrho^3 = s^3 \cos 3\alpha \pm \sqrt{a^6 - s^6 \sin^2 3\alpha}$$

Reelle Werte für ϱ erhält man nur, wenn

$$a^6 > s^6 \sin^2 3\alpha \quad \text{also} \quad \sin^2 3\alpha < \frac{a^6}{s^6}$$

Das ist stets der Fall, wenn $a > s$. Die Kurve geht dann in einem einfachen, geschlossenen Zuge um die Brennpunkte herum. Auch hier sind, wie man leicht erkennt, die durch die Brennpunkte gehenden Radien Maxima.

Wenn hingegen $a < s$, so erhält man reelle Punkte nur in einem begrenzten Bereich zu beiden Seiten der Brennpunktsradien. Die Kurve besteht dann aus drei getrennten Ovalen um die Brennpunkte. Das über die Maximalwerte von ϱ Gesagte gilt auch hier.

Die Gleichung der Hyperbel ist

$$\varrho^3 \sin(\gamma - 3\alpha) = s^3 \sin\gamma$$

Für $\alpha = 0$ oder $\pm \frac{2\pi}{3}$ ist $\varrho = s$

welchen Wert auch γ haben mag. Es gehen also alle Hyperbeln des Büschels durch die Brennpunkte der Lemniskaten.

Für $\varrho = \infty$ wird α der Neigungswinkel der Asymptoten.

Für ihn ist

$$\sin(\gamma - 3\alpha) = 0$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{3} \quad \text{oder} \quad \frac{\gamma \pm \pi}{3}$$

Die drei Asymptoten sind also um 60° gegen einander gedreht. Die Scheitelpunkte sind durch die Minimalwerte von ϱ bestimmt, die man erhält für

$$\sin(\gamma - 3\alpha) = 1$$

$$\alpha = \frac{\gamma - 2\varkappa\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \quad \text{worin} \quad \varkappa = 0,\ 1,\ 2.$$

Dieses sind auch die Neigungswinkel der drei Hauptachsen.

Wenn $\frac{\gamma}{3} = \frac{\pi}{6}$ also $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ist, so hat man diejenige Hyperbel, deren Hauptachsen durch die Brennpunkte der Lemniskaten gehen. Ihre Gleichung wird

$$\varrho^3 \cos 3\alpha = s^3$$

und ihre Scheitelpunkte sind die Brennpunkte.

Je eine Lemniskate und Hyperbel müssen sich, wie aus den vorhergehenden Erörterungen erhellt, in sechs Punkten schneiden. Aus der Gleichung

$$z^3 = s^3 + a^3 e^{i\gamma}$$

die wieder den Entwickelungen für ϱ und α, x und y zu Grunde gelegt werden soll, er-

geben sich nur drei Schnittpunkte. Nach der schon für den Fall n = 2 gemachten Bemerkung erhält man die noch fehlenden drei Schnittpunkte aus der Gleichung

$$z^3 = s^3 - a^3 e^{i\gamma}$$

Im Folgenden soll nur der Punkt

$$z = \sqrt[3]{s^3 + a^3 e^{i\gamma}}$$

berücksichtigt werden.

Es sind nun wieder als Funktionen der lemniskatischen Polarkoordinaten zu berechnen

1) die gewöhnlichen Polarkoordinaten ϱ und α und deren Differentiale,
2) die rechtwinkligen Parallelkoordinaten x und y und deren Differentiale und
3) die Leitstrahlen p_ν nach den Brennpunkten der Lemniskaten und ihre Neigungswinkel ϑ_ν gegen die Abscissenachse.

1) Aus der Gleichung

$$\varrho^3 e^{3i\alpha} = s^3 + a^3 e^{i\gamma}$$

findet man

$$\varrho^3 \cos 3\alpha = s^3 + a^3 \cos\gamma$$

$$\varrho^3 \sin 3\alpha = a^3 \sin\gamma$$

also

$$\varrho^6 = s^6 + 2a^3 s^3 \cos\gamma + a^6$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{a^3 \sin\gamma}{s^3 + a^3 \cos\gamma}$$

ferner durch Differentiation

$$\frac{3}{\varrho}(d\varrho + i\varrho d\alpha) = \frac{a^2 e^{i\gamma}}{s^3 + a^3 e^{i\gamma}}(3da + ia\,d\gamma)$$

$$\frac{3}{\varrho}(d\varrho - i\varrho d\alpha) = \frac{a^2 e^{-i\gamma}}{s^3 + a^3 e^{-i\gamma}}(3da - ia\,d\gamma)$$

Gleichungen, deren Multiplikation für das Linienelement ds ergiebt

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\alpha^2 = \frac{a^4}{\varrho^4}\left(da^2 + \frac{a^2}{9} d\gamma^2\right)$$

während Addition und Subtraktion nach gehöriger Umformung ergiebt

$$d\varrho = \frac{a^2}{\varrho^5}(a^3 + s^3 \cos\gamma)da - \frac{a^3}{3\varrho^5} s^3 \sin\gamma\, d\gamma$$

$$d\alpha = \frac{a^2}{\varrho^6} s^3 \sin\gamma\, da + \frac{a^3}{3\varrho^6}(a^3 + s^3 \cos\gamma)\, d\gamma$$

Für ϱ ist dabei, wie auch überall im Folgenden, stets der dafür berechnete Wert einzusetzen.

2) Mit Hilfe der Werte für ϱ und α findet man

$$x = \varrho \cos\alpha = \varrho \cos\left\{\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{a^3 \sin\gamma}{s^3 + a^3 \cos\gamma}\right\}$$

$$y = \varrho \sin \mathrm{a} = \varrho \sin\left\{\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{a^3 \sin\gamma}{s^3 + a^3 \cos\gamma}\right\}$$

Auch könnte man die in diesen Ausdrücken angedeuteten Rechnungen ausführen, d. h. aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3 \sin\gamma}{s^3+a^3\cos\gamma}$$

$\operatorname{tg}\alpha$ und dann $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ berechnen, um sie in die Gleichungen

$$x = \varrho\cos\alpha \qquad \text{und} \qquad y = \varrho\sin\alpha$$

einzusetzen. Man erhielte auf diese Weise für x und y reelle Ausdrücke in geschlossener Form. Dieselben würden sich auch aus der Gleichung

$$(x+iy)^3 = s^3+a^3\,e^{i\gamma}$$

ergeben, wenn man darin das Reelle vom Imaginären trennte. Es würden in beiden Fällen Gleichungen dritten Grades zu lösen sein und die Endresultate eine ziemlich komplizierte Form annehmen. Diese Rechnung soll deshalb hier nicht durchgeführt, sondern x und y direkt in Reihen entwickelt werden, am einfachsten aus der Gleichung

$$x+iy = (s^3+a^3\,e^{i\gamma})^{\frac{1}{3}}$$

Es sind hierbei zwei Fälle zu unterscheiden:

1) $a < s$ wobei man $\frac{a^3}{s^3} = q$ setze $(q < 1)$

2) $a > s$ wobei man $\frac{s^3}{a^3} = p$ setze $(p < 1)$

Im ersten Fall ergiebt sich

$$x+iy = s(1+q\,e^{i\gamma})^{\frac{1}{3}} = s\left\{1+\frac{1}{3}q\,e^{i\gamma}-\frac{2}{3^2.1.2}q^2 e^{2i\gamma}+\frac{2.5}{3^3.1.2.3}q^3 e^{3i\gamma}-\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{2.5\ldots\{2+(n-2)3\}}{3^n.1.2.3\ldots n}q^n e^{ni\gamma}+\ldots\ldots\right\}$$

und daraus

$$x = s\left\{1+\frac{1}{3}q\cos\gamma-\frac{2}{3.6}q^2\cos 2\gamma+\frac{2.5}{3.6.9}q^3\cos 3\gamma-\frac{2.5.8}{3.6.9.12}q^4\cos 4\gamma+\ldots\right\}$$

$$y = s\left\{\frac{1}{3}q\sin\gamma-\frac{2}{3.6}q^2\sin 2\gamma+\frac{2.5}{3.6.9}q^3\sin 3\gamma-\frac{2.5.8}{3.6.9.12}q^4\sin 4\gamma+\ldots\right\}$$

und im zweiten Fall

$$x+iy = a(e^{i\gamma}+p)^{\frac{1}{3}} = a\left\{e^{\frac{i}{3}\gamma}+\frac{1}{3}p\,e^{-\frac{2i}{3}\gamma}-\frac{2}{3.6}p^2 e^{-\frac{5i}{3}\gamma}+\frac{2.5}{3.6.9}p^3 e^{-\frac{8i}{3}\gamma}-\ldots\ldots\right\}$$

und daraus

$$x = a\left\{\cos\frac{1}{3}\gamma+\frac{1}{3}p\cos\frac{2}{3}\gamma-\frac{2}{3.6}p^2\cos\frac{5}{3}\gamma+\frac{2.5}{3.6.9}p^3\cos\frac{8}{3}\gamma-\ldots\ldots\right\}$$

$$y = a\left\{\sin\frac{1}{3}\gamma-\frac{1}{3}p\sin\frac{2}{3}\gamma+\frac{2}{3.6}p^2\sin\frac{5}{3}\gamma-\frac{2.5}{3.6.9}p^3\sin\frac{8}{3}\gamma+\ldots\ldots\right\}$$

Für den Grenzfall $a = s$ lässt sich x und y direkt berechnen, denn dann ist

$$x+iy = s\left(1+e^{i\gamma}\right)^{\frac{1}{3}} = se^{\frac{i}{6}\gamma}\left(e^{-\frac{i}{2}\gamma}+e^{+\frac{i}{2}\gamma}\right)^{\frac{1}{3}} = s\left(\cos\frac{\gamma}{6}+i\sin\frac{\gamma}{6}\right)\left(2\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

also

$$x = s\cos\frac{\gamma}{6}\sqrt[3]{2\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$y = s\sin\frac{\gamma}{6}\sqrt[3]{2\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Zur Herleitung der Differentialien dx und dy differenziere man die Gleichung

$$x+iy = \left(s^3+a^3e^{i\gamma}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Das giebt

$$dx+idy = a^2e^{i\gamma}\left(s^3+a^3e^{i\gamma}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(da+\frac{ia}{3}d\gamma\right)$$

mithin

$$dx-idy = a^2e^{-i\gamma}\left(s^3+a^3e^{-i\gamma}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(da-\frac{ia}{3}d\gamma\right)$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen erhält man

$$ds^2 = dx^2+dy^2 = a^4\left(s^6+2s^3a^3\cos\gamma+a^6\right)^{-\frac{2}{3}}\left(da^2+\frac{a^2}{9}d\gamma^2\right)$$

$$= \frac{a^4}{\varrho^4}\left(da^2+\frac{a^2}{9}d\gamma^2\right)$$

den schon vorhin gefundenen Ausdruck für das Linienelement. dx und dy selbst erhält man in Form unendlicher Reihen durch Entwickelung von $\left(s^3+a^3e^{i\gamma}\right)^{-\frac{2}{3}}$

Es sind auch hier die beiden Fälle zu unterscheiden

$a < s$, wobei man $\frac{a^3}{s^3} = q$ setze, und

$a > s$, wobei man $\frac{s^3}{a^3} = p$ setze.

Im ersten Fall ergiebt sich

$$\left(1+qe^{i\gamma}\right)^{-\frac{2}{3}} = 1-\frac{2}{3}qe^{i\gamma}+\frac{2.5}{3^2.1.2}q^2e^{2i\gamma}-\frac{2.5.8}{3^3.1.2.3}q^3e^{3i\gamma}+\dots$$
$$+(-1)^\nu\frac{2.5.8\dots(3\nu-1)}{3^\nu.1.2.3\dots\nu}q^\nu e^{ni\gamma}+\dots$$

$$dx+idy = qe^{i\gamma}\left(1+qe^{i\gamma}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{s}{a}da+\frac{is}{3}d\gamma\right)$$

$$= \left\{qe^{i\gamma}-\frac{2}{3}q^2e^{2i\gamma}+\frac{2.5}{3^2.1.2}q^3e^{3i\gamma}-\frac{2.5.8}{3^3.1.2.3}q^4e^{4i\gamma}+\dots\right\}\left(\frac{s}{a}da+\frac{is}{3}d\gamma\right)$$

$$= \left(C_3+iS_3\right)\left(\frac{s}{a}da+\frac{is}{3}d\gamma\right)$$

worin

$$C_3 = q\cos\gamma - \frac{2}{3}\,q^2\cos 2\gamma + \frac{2.5}{3.6}\,q^3\cos 3\gamma - \frac{2.5.8}{3.6.9}\,q^4\cos 4\gamma + \ldots .$$

$$S_3 = q\sin\gamma - \frac{2}{3}\,q^2\sin 2\gamma + \frac{2.5}{3.6}\,q^3\sin 3\gamma - \frac{2.5.8}{3.6.9}\,q^4\sin 4\gamma + \ldots .$$

also

$$dx = C_3\,\frac{s}{a}\,da - S_3\,\frac{s}{3}\,d\gamma$$

$$dy = S_3\,\frac{s}{a}\,da + C_3\,\frac{s}{3}\,d\gamma$$

und im zweiten Fall

$$(e^{i\gamma}+p)^{-\frac{2}{3}} = e^{-\frac{2i}{3}\gamma} - \frac{2}{3}\,p\,e^{-\frac{5i}{3}\gamma} + \frac{2.5}{3^2.1.2}\,p^2 e^{-\frac{8i}{3}\gamma} - \frac{2.5.8}{3^3.1.2.3}\,p^3 e^{-\frac{11i}{3}\gamma} + \ldots .$$

$$\ldots .(-1)^\nu\,\frac{2.5.8\ldots(3\nu-1)}{3^\nu.1.2.3\ldots\nu}\,p^\nu e^{-\frac{(3\nu+2)i}{3}\gamma} + \ldots .$$

$$dx+i\,dy = e^{i\gamma}\left(e^{i\gamma}+p\right)^{-\frac{2}{3}}\left(da+\frac{ia}{3}d\gamma\right)$$

$$= \left\{e^{\frac{i}{3}\gamma} - \frac{2}{3}\,p\,e^{-\frac{2i}{3}\gamma} + \frac{2.5}{3^2.1.2}\,p^2 e^{-\frac{5i}{3}\gamma} - \frac{2.5.8}{3^3.1.2.3}\,p^3 e^{-\frac{8i}{3}\gamma} + \ldots .\right\}\left(da+\frac{ia}{3}d\gamma\right)$$

$$= \left(C'_3+i\,S'_3\right)\left(da+\frac{ia}{3}d\gamma\right) \qquad \text{worin}$$

$$C'_3 = \cos\frac{1}{3}\gamma - \frac{2}{3}\,p\cos\frac{2}{3}\gamma + \frac{2.5}{3.6}\,p^2\cos\frac{5}{3}\gamma - \frac{2.5.8}{3.6.9}\,p^3\cos\frac{8}{3}\gamma + \ldots .$$

$$S'_3 = \sin\frac{1}{3}\gamma + \frac{2}{3}\,p\sin\frac{2}{3}\gamma - \frac{2.5}{3.6}\,p^2\sin\frac{5}{3}\gamma + \frac{2.5.8}{3.6.9}\,p^3\sin\frac{8}{3}\gamma - \ldots .$$

also

$$dx = C'_3\,da - S'_3\,\frac{a}{3}\,d\gamma$$

$$dy = S'_3\,da + C'_3\,\frac{a}{3}\,d\gamma$$

Für den Grenzfall $a = s$, also für konstantes a, hat man

$$dx+i\,dy = e^{i\gamma}(1+e^{i\gamma})^{-\frac{2}{3}}\,\frac{is}{3}\,d\gamma = e^{\frac{2i}{3}\gamma}\left(e^{-\frac{i}{2}\gamma}+e^{+\frac{i}{2}\gamma}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{is}{3}d\gamma$$

$$= \frac{is\left(\cos\frac{2}{3}\gamma + i\sin\frac{2}{3}\gamma\right)}{3\sqrt[3]{4\cos^2\frac{\gamma}{2}}}$$

$$dx = -\frac{s.\sin\frac{2}{3}\gamma}{3\sqrt[3]{4\cos^2\frac{\gamma}{2}}}\,d\gamma \qquad \text{und} \qquad dy = \frac{s.\cos\frac{2}{3}\gamma}{3\sqrt[3]{4\cos^2\frac{\gamma}{2}}}$$

3. Für die Leitstrahlen p_ν des Punktes z nach den Brennpunkten

$$q_1 = s$$

$$q_2 = s e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{s}{2}(1-i\sqrt{3})$$

$$q_3 = s e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{s}{2}(1+i\sqrt{3})$$

und deren Neigungswinkel ϑ_ν gegen die positive Abscissenachse hat man die Beziehungen

$$p_1 e^{i\vartheta_1} = z - s = (x-s) + iy$$

$$p_2 e^{i\vartheta_2} = z - s e^{\frac{2i\pi}{3}} = \left(x+\frac{s}{2}\right) + i\left(y - \frac{s}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$p_3 e^{i\vartheta_3} = z - s e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \left(x+\frac{s}{2}\right) + i\left(y + \frac{s}{2}\sqrt{3}\right)$$

woraus sich ergiebt

$$p_1^{\,2} = y^2 + (x-s)^2 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{y}{x-s}$$

$$p_2^{\,2} = \left(y - \frac{s}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(x+\frac{s}{2}\right)^2 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tg}\vartheta_2 = \frac{y-\frac{s}{2}\sqrt{3}}{x+\frac{s}{2}}$$

$$p_3^{\,2} = \left(y + \frac{s}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(x+\frac{s}{2}\right)^2 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tg}\vartheta_3 = \frac{y+\frac{s}{2}\sqrt{3}}{x+\frac{s}{2}}$$

Setzt man hierin die berechneten Werte für x und y ein, so stellen sich die Ausdrücke für $p_\nu^{\,2}$ als die Summen der Quadrate zweier unendlicher Reihen dar, während die $\operatorname{tg}\vartheta_\nu$ die Quotienten derselben beiden Reihen sind. — Wenn man die Reihen quadriert und addiert und dabei passende Glieder zusammenzieht, so kommt man auf eine Entwickelung für $p_\nu^{\,2}$ nach den Kosinus der ganzen Vielfachen von γ, nämlich

$$p_1^{\,2} = (A_0 - 2A_1\cos\gamma + 2A_2\cos 2\gamma - \ldots\ldots (-1)^n 2A_n \cos n\gamma + \ldots\ldots)s^2$$

worin

$$A_n = a_1 a_{n+1} + a_2 a_{n+2} + a_3 a_{n+3} + \ldots\ldots + a_\nu a_{n+\nu} + \ldots$$

und

$$a_\nu = \frac{2.5.8\ldots\{2+(\nu-2).3\}}{3^\nu.1.2.3\ldots\nu} q^\nu$$

$$a_{n+\nu} = \frac{2.5.8\ldots\{2+(n+\nu-2)3\}}{3^{\nu+n}.1.2.3\ldots(\nu+n)} q^{\nu+n}$$

Es sind also sämtliche Koeffizienten unendliche Reihen und die Reihe selbst daher für die Berechnung in bestimmten Zahlen weniger geeignet als der vorige Ausdruck.

V. Reguläre lemniskatische Polarkoordinaten n^{ter} Ordnung.

Die Transformationsgleichung für diesen Fall lautet

$$a^n e^{i\gamma} = \varrho^n e^{in\alpha} - s^n$$

Aus ihr erhält man

$$a^n \cos\gamma = \varrho^n \cos n\alpha - s^n$$

$$a^n \sin\gamma = \varrho^n \sin n\alpha$$

Quadrieren und Addieren dieser beiden Gleichungen ergiebt

$$a^{2n} = \varrho^{2n} - 2\varrho^n s^n \cos n\alpha + s^{2n}$$

die Polargleichung der Schar regulärer Lemniskaten n^{ter} Ordnung, während man durch Elimination von a^n erhält.

$$\varrho^n(\cos n\alpha \sin\gamma - \sin n\alpha \cos\gamma) = s^n \sin\gamma$$

oder

$$\varrho^n \sin(\gamma - n\alpha) = s^n \sin\gamma$$

die Polargleichung des Büschels regulärer Hyperbeln n^{ter} Ordnung, der orthogonalen Trajektorien der Lemniskatenschar. Die Form der Gleichungen zeigt, dass beide Kurven n durch den Nullpunkt gehende, um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ gegen einander geneigte Symmetrieachsen haben, denn eine Änderung des Winkels α um $\frac{2\varkappa\pi}{n}$ lässt beide Gleichungen ungeändert.

Die Gleichung der Lemniskate nimmt für $a = s$ die Form an

$$\varrho^n = 2s^n \cos n\alpha$$

Es ist die Gleichung der Schleifenlemniskate, die in n Zügen durch den Nullpunkt hindurchgeht, denn

für $\varrho = 0$ ist $\cos n\alpha = 0$

also $\alpha = \frac{2\varkappa+1}{2n}\pi$, worin $\varkappa = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$ sein kann.

Unter diesen Winkeln schneiden die n Züge im Nullpunkt die Abscissenachse. — Die Kurve hat für jeden Wert von α nur einen reellen Wert für ϱ, wenn n ungerade, zwei entgegengesetzte reelle Werte, wenn n gerade ist.

Den Maximalwert erreicht ϱ, wenn

$$\cos n\alpha = 1 \qquad \text{also} \qquad \alpha = \frac{2\varkappa\pi}{n} \text{ ist,}$$

worin wieder $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$ sein kann.

Da durch diese Winkel die Brennpunkte bestimmt waren, so sind die durch die Brennpunkte hindurchgehenden Radienvectoren die grössten. — Die Kurve liegt symmetrisch zu beiden Seiten dieser Radien, denn es ist

$$\cos n\left(\frac{2\varkappa\pi}{n} + \omega\right) = \cos n\left(\frac{2\varkappa\pi}{n} - \omega\right)$$

Wenn a von s verschieden ist, so schreibe man die Gleichung der Lemniskate

$$\varrho^n = s^n \cos n\alpha \pm \sqrt{a^{2n} - s^{2n} \sin^2 n\alpha}$$

Man ersieht daraus, dass es reelle Werte von ϱ nur giebt, wenn

$$a^{2n} > s^{2n} \sin^2 n\alpha \qquad \text{also} \qquad \sin^2 n\alpha < \frac{a^{2n}}{s^{2n}}$$

Das ist stets der Fall, wenn $a > s$. Dann giebt es für jedes α zwei von Null verschiedene Werte für ϱ, und die Kurve geht in einem geschlossenen Zuge um die Brennpunkte herum. Die Radien durch die Brennpunkte werden auch hier Maxima. — Ist hingegen $a < s$, so hat die Kurve reelle Punkte nur in einem begrenzten Bereich zu beiden Seiten der Brennpunktsradien und besteht aus n von einander getrennten Ovalen um die Brennpunkte.

Die Gleichung der Hyperbel lautet

$$\varrho^n \sin(\gamma - n\alpha) = s^n \sin\gamma$$

Wenn $\alpha = \frac{2\varkappa\pi}{n}$ ist, so wird $\varrho = s$

und zwar ganz unabhängig von γ. Darum gehen alle Hyperbeln des Büschels durch die Brennpunkte der Lemniskaten.

Für $\varrho = \infty$ wird $\sin(\gamma - n\alpha) = 0$ also $\alpha = \frac{\gamma + \varkappa\pi}{n}$

Dieses sind die Neigungswinkel der Asymptoten gegen die positive Abscissenachse.

Die Minimalwerte für ϱ, d. h. die Scheitelradien erhält man, wenn

$$\sin(\gamma - n\alpha) = 1 \qquad \text{also} \qquad \alpha = \frac{\gamma + 2\varkappa\pi - 90}{n}$$

Sie sind $\varrho = s\sqrt[n]{\sin\gamma}$

Der Wert $\gamma = \frac{\pi}{2}$ liefert also diejenige Hyperbel, deren Scheitelpunkte die Brennpunkte der Lemniskaten sind, und deren Gleichung ist

$$\varrho^n \cos n\alpha = s^n$$

Von den $2n$ Schnittpunkten je einer Lemniskate und einer Hyperbel, die sich aus der Gleichung

$$z^n = s^n \pm a^n e^{i\gamma}$$

ergeben, soll wieder nur der Punkt

$$z = \sqrt[n]{s^n + a^n e^{i\gamma}}$$

berücksichtigt werden

1. Um seine gewöhnlichen Polarkoordinaten als Funktionen der lemniskatischen Polarkoordinaten darzustellen, schreibe man die obige Gleichung

$$\varrho^n e^{in\alpha} = s^n + a^n e^{i\gamma}$$

Aus ihr folgt

$$\varrho^n \cos n\alpha = s^n + a^n \cos\gamma$$

$$\varrho^n \sin n\alpha = a^n \sin\gamma$$

also

$$\varrho^{2n} = s^{2n} + 2a^n s^n \cos\gamma + a^{2n}$$

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{a^n \sin\gamma}{s^n + a^n \cos\gamma}$$

Durch Differentiation erhält man

$$\frac{n}{\varrho}(d\varrho + i\varrho d\alpha) = \frac{n a^{n-1} e^{i\gamma}}{s^n + a^n e^{i\gamma}}\left(da + \frac{ia}{n} d\gamma\right)$$

also

$$\frac{n}{\varrho}(d\varrho - i\varrho d\alpha) = \frac{n a^{n-1} e^{-i\gamma}}{s^n + a^n e^{-i\gamma}}\left(da - \frac{ia}{n} d\gamma\right)$$

und durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\alpha^2 = \left(\frac{a}{\varrho}\right)^{2n-2}\left(da^2 + \frac{a^2}{n^2} d\gamma^2\right)$$

während Addition und Subtraktion nach gehöriger Reduktion ergiebt

$$d\varrho = \frac{a^{n-1}(a^n + s^n \cos\gamma)}{\varrho^{2n-1}} da - \frac{a^n s^n \sin\gamma}{n\varrho^{2n-1}} d\gamma$$

$$d\alpha = \frac{a^{n-1} s^n \sin\gamma}{\varrho^{2n}} da + \frac{a^n(a^n + s^n \cos\gamma)}{n\varrho^{2n}} d\gamma$$

Für ϱ ist hierin stets der vorhin berechnete Wert zu setzen.

2. Für die rechtwinkligen Parallelkoordinaten x und y erhält man Reihenentwickelungen aus der Gleichung

$$x + iy = (s^n + a^n e^{i\gamma})^{\frac{1}{n}}$$

Es sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden

$$a < s \quad \text{wobei man} \quad \frac{a^n}{s^n} = q \quad \text{setze} \quad (q < 1)$$

$$a > s \quad \text{wobei man} \quad \frac{s^n}{a^n} = p \quad \text{setze} \quad (p < 1)$$

Im ersten Fall ist

$$x + iy = s(1 + qe^{i\gamma})^{\frac{1}{n}} = s\left\{1 + \frac{1}{n} q e^{i\gamma} - \frac{n-1}{n^2.1.2} q^2 e^{2i\gamma} + \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3.1.2.3} q^3 e^{3i\gamma} - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots(-1)^{\nu+1} \frac{(n-1)(2n-1)\ldots\{(\nu-1)n-1\}}{n^\nu.1.2.3\ldots\nu} q^\nu e^{\nu i\gamma} + \ldots\right\}$$

daher

$$x = s\left\{1 + \frac{1}{n} q \cos\gamma - \frac{n-1}{n.2n} q^2 \cos 2\gamma + \frac{(n-1)(2n-1)}{n.2n.3n} q^3 \cos 3\gamma - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n.2n.3n.4n} q^4 \cos 4\gamma + \ldots\right\}$$

$$y = s\left\{\frac{1}{n} q \sin\gamma - \frac{n-1}{n.2n} q^2 \sin 2\gamma + \frac{(n-1)(2n-1)}{n.2n.3n} q^3 \sin 3\gamma - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n.2n.3n.4n} q^4 \sin 4\gamma + \ldots\right\}$$

und im zweiten Fall

$$x+iy = a(e^{i\gamma}+p)^{\frac{1}{n}} = a\left\{e^{\frac{i}{n}\gamma}+\frac{1}{n}p\,e^{-\frac{n-1}{n}i\gamma}-\frac{n-1}{n^2.1.2}p^2e^{-\frac{2n-1}{n}i\gamma}+\frac{(n-1)(2n-1)}{n^3.1.2.3}p^3e^{-\frac{3n-1}{n}i\gamma}-\ldots\right\}$$

daher

$$x = a\left\{\cos\frac{1}{n}\gamma+\frac{1}{n}p\cos\frac{n-1}{n}\gamma-\frac{n-1}{n.2n}p^2\cos\frac{2n-1}{n}\gamma+\frac{(n-1)(2n-1)}{n.2n.3n}p^3\cos\frac{3n-1}{n}\gamma-\ldots\right\}$$

$$y = a\left\{\sin\frac{1}{n}\gamma-\frac{1}{n}p\sin\frac{n-1}{n}\gamma+\frac{n-1}{n.2n}p^2\sin\frac{2n-1}{n}\gamma-\frac{(n-1)(2n-1)}{n.2n.3n}p^3\sin\frac{3n-1}{n}\gamma+\ldots\right\}$$

während sich für $a = s$ ergiebt.

$$x+iy = s(1+e^{i\gamma})^{\frac{1}{n}} = se^{\frac{i\gamma}{2n}}\left(e^{-\frac{i}{2}\gamma}+e^{+\frac{i}{2}\gamma}\right)^{\frac{1}{n}} = s\left(\cos\frac{\gamma}{2n}+i\sin\frac{\gamma}{2n}\right)\sqrt[n]{2\cos\frac{\gamma}{2}}$$

also

$$x = s\cos\frac{\gamma}{2n}\sqrt[n]{2\cos\frac{\gamma}{2}} \qquad \text{und} \qquad y = s\sin\frac{\gamma}{2n}\sqrt[n]{2\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Durch Differentiation der Gleichung

$$x+iy = (s^n+a^ne^{i\gamma})^{\frac{1}{n}}$$

findet man
$$dx+idy = a^{n-1}e^{i\gamma}(s^n+a^ne^{i\gamma})^{\frac{1-n}{n}}\left(da+\frac{ia}{n}d\gamma\right)$$

also ist
$$dx-idy = a^{n-1}e^{-i\gamma}(s^n+a^ne^{-i\gamma})^{\frac{1-n}{n}}\left(da-\frac{ia}{n}d\gamma\right)$$

und
$$ds^2 = dx^2+dy^2 = \left(\frac{a}{\varrho}\right)^{2n-2}.\left(da^2+\frac{a^2}{n^2}d\gamma^2\right)$$

Derselbe Ausdruck für das Linienelement ergab sich bereits auf andere Art.

Zu Reihenentwickelungen für dx und dy gelangt man auf folgende Weise:

Es ist, wenn $a < s$ und $\frac{a^n}{s^n} = q$ gesetzt wird,

$$(1+qe^{i\gamma})^{\frac{1}{n}-1} = 1-\frac{n-1}{n}qe^{i\gamma}+\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2.1.2}q^2e^{2i\gamma}-\ldots(-1)^\nu\frac{(n-1)(2n-1)\ldots(\nu n-1)}{n^\nu.1.2.3\ldots\nu}q^\nu e^{\nu i\gamma}+\ldots$$

$$dx+idy = qe^{i\gamma}(1+qe^{i\gamma})^{\frac{1}{n}-1}\left(\frac{s}{a}da+\frac{is}{n}d\gamma\right)$$

$$= \left\{qe^{i\gamma}-\frac{n-1}{n}q^2e^{2i\gamma}+\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2.1.2}q^3e^{3i\gamma}-\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^3.1.2.3}q^4e^{4i\gamma}+\ldots\right\}\left(\frac{s}{a}da+\frac{is}{n}d\gamma\right)$$

$$= (C_n+iS_n)\left(\frac{s}{a}da+\frac{is}{n}d\gamma\right) \quad \text{worin}$$

$$C_n = q\cos\gamma-\frac{n-1}{n}q^2\cos2\gamma+\frac{(n-1)(2n-1)}{n.2n}q^3\cos3\gamma-\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n.2n.3n}q^4\cos4\gamma+\ldots$$

$$S_n = q\sin\gamma-\frac{n-1}{n}q^2\sin2\gamma+\frac{(n-1)(2n-1)}{n.2n}q^3\sin3\gamma-\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n.2n.3n}q^4\sin4\gamma+\ldots$$

Mithin wird

$$dx = C_n \frac{s}{a} da - S_n \frac{s}{n} d\gamma$$

$$dy = S_n \frac{s}{a} da + C_n \frac{s}{n} d\gamma$$

Wenn hingegen $a > s$ und deshalb $\frac{s^n}{a^n} = p$ gesetzt wird, so ist

$$(e^{i\gamma}+p)^{\frac{1}{n}-1} = e^{-\frac{n-1}{n}i\gamma} - \frac{n-1}{n} p\, e^{-\frac{2n-1}{n}i\gamma} + \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2.1.2} p^2 e^{-\frac{3n-1}{n}i\gamma} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^3.1.2.3} p^3 e^{-\frac{4n-1}{n}i\gamma} + \ldots$$

$$dx+idy = e^{i\gamma}(e^{i\gamma}+p)^{\frac{1}{n}-1}\left(da+\frac{ia}{n}d\gamma\right)$$

$$= \left\{e^{\frac{i}{n}\gamma} - \frac{n-1}{n} p\, e^{-\frac{n-1}{n}i\gamma} + \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2.1.2} p^2 e^{-\frac{2n-1}{n}i\gamma} - \ldots\ldots\right\} . \left(da+\frac{ia}{n}d\gamma\right)$$

$$= (C'_n+iS'_n)\left(da+\frac{ia}{n}d\gamma\right) \quad \text{worin}$$

$$C'_n = \cos\frac{1}{n}\gamma - \frac{n-1}{n} p \cos\frac{n-1}{n}\gamma + \frac{(n-1)(2n-1)}{n.2n} p^2 \cos\frac{2n-1}{n}\gamma - \ldots.$$

$$S'_n = \sin\frac{1}{n}\gamma + \frac{n-1}{n} p \sin\frac{n-1}{n}\gamma - \frac{(n-1)(2n-1)}{n.2n} p^2 \sin\frac{1n-1}{n}\gamma + \ldots.$$

so dass man hat

$$dx = C'_n\, da - S'_n \frac{a}{n} d\gamma$$

$$dy = S'_n\, da + C'_n \frac{a}{n} d\gamma$$

Ist endlich $a = s$, also konstant, so wird

$$dx+idy = e^{i\gamma}(1+e^{i\gamma})^{\frac{1}{n}-1}\frac{is}{n}d\gamma = e^{\frac{n+1}{2n}i\gamma}\left(e^{-\frac{i}{2}\gamma}+e^{+\frac{i}{2}\gamma}\right)^{\frac{1-n}{n}}\frac{is}{n}d\gamma$$

$$= \frac{is\left(\cos\frac{n+1}{2n}\gamma + i\sin\frac{n+1}{2n}\gamma\right)}{n.\sqrt[n]{\left(2\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{n-1}}} d\gamma$$

und man hat

$$dx = -\frac{s.\sin\frac{n+1}{2n}\gamma}{n.\sqrt[n]{\left(2\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{n-1}}} d\gamma \quad \text{und} \quad dy = \frac{s.\cos\frac{n+1}{2n}\gamma}{n.\sqrt[n]{\left(2\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{n-1}}} d\gamma$$

3. Brennpunkte der regulären Lemniskate n[ter] Ordnung sind die Punkte

$$s\,e^{\frac{2i\varkappa\pi}{n}} \quad \text{worin} \quad \varkappa = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1) \quad \text{sein kann.}$$

Für die Leitstrahlen $p_\varkappa$ des Punktes z nach diesen Brennpunkten und ihre Neigungswinkel $\vartheta_\varkappa$ gegen die positive Abscissenachse hat man deshalb die Beziehungen

$$p_\varkappa e^{i\vartheta_\varkappa} = z - s\,e^{\frac{2i\varkappa\pi}{n}}$$

oder

$$p_\varkappa(\cos\vartheta_\varkappa + i\sin\vartheta_\varkappa) = x + iy - s\left(\cos\frac{2\varkappa\pi}{n} + i\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)$$

also

$$p_\varkappa \cos\vartheta_\varkappa = x - s\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}$$

$$p_\varkappa \sin\vartheta_\varkappa = y - s\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}$$

Deshalb ist

$$p_\varkappa^{\,2} = \left(x - s\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)^2 + \left(y - s\,.\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)^2$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_\varkappa = \frac{y - s\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}}{x - s\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}}$$

Setzt man hierin die für x und y berechneten Werte ein, so erhält man für $\left(x - s\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)$ und $\left(y - s\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)$ Reihen, die sich von den für x und y gefundenen nur durch das konstante Glied unterscheiden. Die $p_\varkappa^{\,2}$ sind dann die Summen der Quadrate dieser beiden Reihen und $\operatorname{tg}\vartheta_\varkappa$ die Quotienten derselben. — Das über die Entwickelung von $p_\varkappa^{\,2}$ nach den Kosinus der Vielfachen von γ für den Fall $n = 3$ Gesagte gilt auch hier.

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass auch im allgemeinen Fall, wenn in der Transformationsgleichung $f(z)$ eine beliebige ganze rationale Funktion n^{ten} Grades von z ist, die Gleichungen der Lemniskatenschar und ihrer orthogonalen Trajektorien in gewöhnlichen Polarkoordinaten sich leicht aufstellen lassen. — Als Beispiel dafür sollen die Gleichungen dieser Kurven für $n = 3$ hergeleitet werden.

Setzt man $\varrho e^{i\alpha}$ für z ein, so lautet die Transformationsgleichung

$$a^3 e^{i\gamma} = a_3 \varrho^3 e^{3i\alpha} + a_2 \varrho^2 e^{2i\alpha} + a_1 \varrho e^{i\alpha} + a_0$$

aus der man erhält

$$a^3 \sin\gamma = a_3 \varrho^3 \sin 3\alpha + a_2 \varrho^2 \sin 2\alpha + a_1 \varrho \sin\alpha + a_0$$

$$a^3 \cos\gamma = a_3 \varrho^3 \cos 3\alpha + a_2 \varrho^2 \cos 2\alpha + a_1 \varrho \cos\alpha + a_0$$

Wenn man diese beiden Gleichungen quadiert und addiert, so ergiebt sich unter Berücksichtigung der Formel

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$a^6 = \left\{ \begin{array}{l} (a_3^2 \varrho^6 + a_2^2 \varrho^4 + a_1^2 \varrho^2 + a_0^2) \\ +2(a_2 a_3 \varrho^5 + a_1 a_2 \varrho^3 + a_0 a_1 \varrho) \cos\alpha \\ +2(a_1 a_3 \varrho^4 + a_0 a_2 \varrho^2) \cos 2\alpha \\ +2 a_0 a_3 \varrho^3 \cos 3\alpha \end{array} \right\}$$

die Gleichung der Schar irregulärer Lemniskaten dritter Ordnung.

Wenn man jedoch die erste der beiden Gleichungen mit $\cos\gamma$, die zweite mit $\sin\gamma$ multipliziert und von einander subtrahiert, so ergiebt sich bei Anwendung der Formel

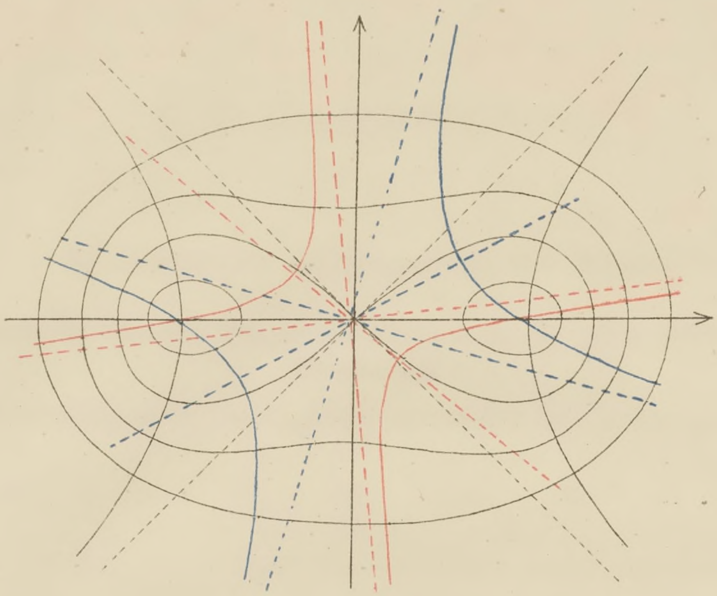
$$\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

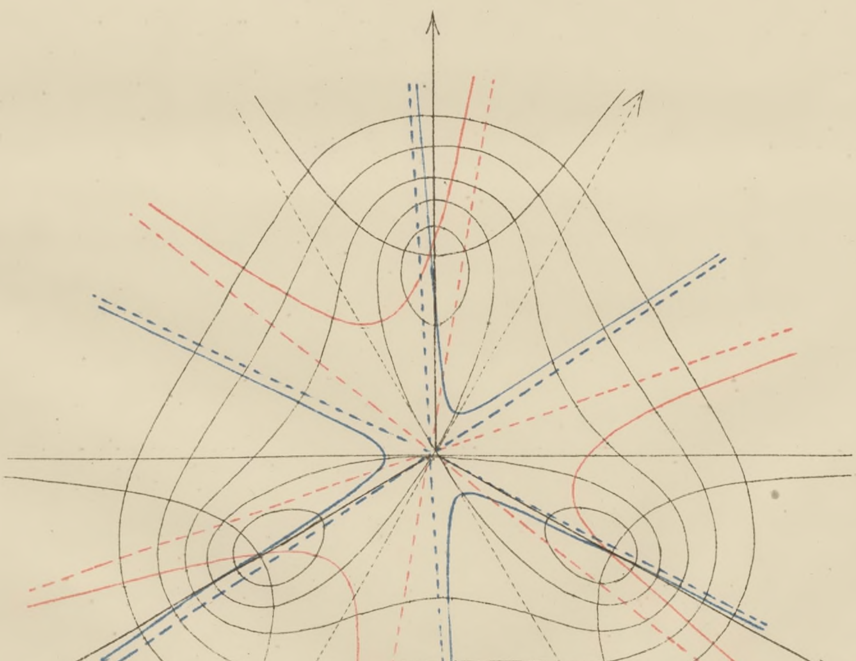
$$a_3 \varrho^3 \sin(\gamma - 3\alpha) + a_2 \varrho^2 \sin(\gamma - 2\alpha) + a_1 \varrho \sin(\gamma - \alpha) + a_0 \sin\gamma = 0$$

die Gleichung des Büschels irregulärer Hyperbeln dritter Ordnung.

Koordinatennetze

für reguläre lemniskatische Polarkoordinaten zweiter und dritter Ordnung.





Gez. v. G. Schulz.

Schulnachrichten.

I. Allgemeine Lehrverfassung der Schule.

1. Übersicht über die einzelnen Lehrgegenstände und die für jeden derselben bestimmte Stundenzahl.

Lehrgegenstände.	IIa.	IIb.	IIIa.	IIIb.	IV.	V.	VI.	Summa.
Christliche Religionslehre.	2	2	2	2	2	2	3	11
Deutsch	3	3	3	3	3	3	3	15
Latein	5	5	6	6	7	7	8	38
Französisch	4	4	4	4	5	5	—	18
Englisch	3	3	4	4	—	—	—	11
Geschichte und Geographie	3	3	4	4	4	3	3	17
Rechnen und Mathematik	5	5	5	5	5	4	5	34
Naturbeschreibung	—	2	2	2	2	2	2	10
Physik	3	3	—	—	—	—	—	6
Chemie	2	—	—	—	—	—	—	2
Schreiben	—	—	—	—	—	2	2	4
Zeichnen	2	2	2	2	2	2	2	10
Gesang	2	2	2	2	2	2	2	4
Summa	34	34	34	34	32	32	30	

2. Übersicht der Verteilung der Stunden unter die einzelnen Lehrer.

Lehrer.	Ordinariat.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Summa.
Zander, Rektor.	II.	5 Latein. a. 5 Latein. b. 4 Franz.					14
Meißner, Oberlehrer.		5 Math. a. 5 Math. b. 3 Physik. a. 2 Chemie. a.	5 Math. a.	2 Geographie.			22
Saltzmann, 1. ordentl. Lehrer.	III.	3 Deutsch. 3 Englisch.	3 Deutsch. 4 Franz. 4 Englisch. a.		5 Franz.		22
Schulz, 2. ordentl. Lehrer.	IV.	3 Physik. b.	5 Math. b. 4 Englisch. b.	5 Math. 5 Franz.			22
Amlauff, 3. ordentl. Lehrer.	V.	3 Geschichte u. Geographie.		2 Geschichte.	7 Latein. 3 Geschichte u. Geographie.	8 Latein. 1 Geschichte.	24
Kawolewsky, wissenschaftlicher Hilfslehrer.		2 Religion.	2 Religion. 6 Latein. 4 Geschichte u. Geographie.	2 Religion. 7 Latein.			23
Dumont, technischer Lehrer.		2 Zeichnen. 2 Gesang. (II.–IV.)	2 Zeichnen.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen. 2 Schreiben. 4 Rechnen. 2 Gesang. (V.–VI.)	2 Zeichnen. 2 Schreiben. 5 Rechnen.	27
Bosse, zugl. Turnlehrer.	VI.	2 Naturb. b.	2 Naturb.	3 Deutsch. 2 Naturb.	2 Religion. 3 Deutsch. 2 Naturb.	3 Religion. 3 Deutsch. 2 Naturb. 2 Geographie.	26
Summa		(19 + 15) 34	(25 + 9) 34	32	32	30	

3. Übersicht über die während des abgelaufenen Schuljahres absolvierten Pensen.

Sekunda.

Ordinarius: Der Rektor.

(Getrennter Unterricht in IIa und IIb für Latein, Mathematik, Physik, Chemie a und Naturbeschreibung b; gemeinschaftlicher Unterricht in den übrigen Gegenständen.)

1. Religion. 2 St. Kawolewsky. Wiederholung des Katechismus und des Kirchenjahres, sowie der Einleitung in die heilige Schrift. Hauptepochen aus der Kirchengeschichte bis zum Beginn der Reformation. Die wichtigsten christlichen Symbole. Lektüre aus Hiob, dem Psalter und des Evangeliums nach Lukas nebst den Einleitungen dazu. Drei Kirchenlieder; Wiederholung der früheren.

2. Deutsch. 3 St. Saltzmann. Die Lektüre umfaßte in zwei wöchentlichen Stunden Goethes Hermann und Dorothea, Körners Zriny, Schillers Wilhelm Tell. — Privatim wurde Reinecke Fuchs und Schillers Räuber gelesen. In der Litteraturgeschichte, wöchentlich 1 St., wurde die Zeit bis zur Reformation behandelt und dabei die Nibelungen, Gudrun, der große Rosengarten gelesen. — Gelernt wurden einzelne Abschnitte und ganze Scenen aus Wilhelm Tell — Die Aufgaben zu den deutschen Aufsätzen waren folgende: 1. Die Aussicht vom Schwalbenberge auf Pillau. 2. Die Ortsverhältnisse in Hermann und Dorothea. 3. Der Gastwirt zum goldenen Löwen. 4. Der Tod Siegfrieds. 5. Die Vorfabel zu Lessins Nathan der Weise. 6. Welche Vorteile und Annehmlichkeiten bietet den Küstenbewohnern die Nähe des Meeres? 7. Wie wurde bei den Griechen das Nationalbewußtsein erweckt und gepflegt? 8. Der Schwur auf dem Rütli. 9. Wilhelm Tell und Parricida (ein Vergleich). 10. Morgenstunde hat Gold im Munde. 11. Die Natur im Winter.

Aufgabe für die Abiturientenprüfung:

Ans Vaterland, ans teure, schließ' dich an,
Das halte fest mit deinem ganzen Herzen.

3. Latein. 5 St. in IIa und IIb. Nach Fromms Grammatik unter Anwendung von desselben Übungsbuch II. Der Rektor. IIa. Gelegentliche Wiederholungen aus der Grammatik, wöchentliche Extemporalien Gelesen wurde Ciceros Laelius und aus Ovids Metamorphosen: Die kalydonische Jagd, Meleager VIII, 260—545; Midas XI, 85—193; Ceyx und Halcyone XI, 410—748. — Loci memoriales aus Laelius. — Kursorisch wurde in einer wöchentlichen Extrastunde in Verbindung mit IIb während des Wintersemesters Caes. de bell. Gall. lib. IV gelesen.

IIb. Wiederholung der Kasuslehre. Abschluß der Syntax. Römischer Kalender. Notwendigstes aus Prosodik und Metrik: Jambischer Trimeter, heroisches und elegisches Versmaß. — Exercitien und Extemporalien wöchentlich abwechselnd. — Gelesen wurde aus Caes. de bell. Gall. I, 30—54; III, 1—29. Über die kursorische Lektüre vergl. IIa; aus Ovids Metamorphosen: Niobe, die Frösche VI, 146—381; Dädalus, Perdix VIII, 183—269; Philemon und Baucis VIII, 612—727. — Die Sage von den Fröschen und eine Anzahl versus memor. wurden gelernt

4. Französisch. 4 St. Nach Plötz' Schulgrammatik. Der Rektor. Lektion 39—60. Wortstellung; Gebrauch der Zeiten und Moden; Syntax des Artikels. — Wöchentlich Exercitien und Extemporalien; ab und zu ein Diktat. — Zur Lektüre diente zuerst Plötz' Chrestomathie in den

Abschnitten III—VII: Histoire naturelle et Descriptions, Narrations fictives; Lettres; Caractères. Dialogues; und nach Behandlung des Wichtigsten aus der Verslehre Scenen aus Tragödien von Corneille, Racine, Voltaire, Raynouard 2c. in Abschnitt VIII. Außerdem wurde gelesen aus Charles douze von Voltaire der größte Teil des 5. und der erste Teil des 6. Buches.

5. Englisch. 3 St. Nach Deutschbeins theoretisch-praktischem Lehrgang. Saltzmann. Die Lektionen 83—95 wurden in einwöchentlicher Stunde durchgenommen; dazu wöchentliche Exercitien und Extemporalien, Sprechübungen. — Lektüre 2 St: Hume: The Age of the Stuarts.

6. Geschichte 2 St. Nach Dielitz' Weltgeschichte. Umlauff. Griechische und griechisch-macedonische Geschichte, einschließlich der Zeit des Diadochen. — Römische Geschichte bis zum Untergange des weströmischen Reiches. — Repetitionen nach dem Kanon für die mittleren Klassen höherer Lehranstalten.

7. Geographie. 1 St. Nach von Seydlitz' kleiner Schulgeographie. Umlauff. Die außereuropäischen Länder. Kartenzeichnen.

8. Mathematik. 5 St. in IIa und IIb. Nach Mehlers Hauptsätze der Elementarmathematik. Oberlehrer Meißner.

IIa. Geometrie. 3 St. Stereometrie. — Harmonische Teilung; Pol und Polare. — Von der Potenzialität, dem rechtwinkligen Schneiden und von der Ähnlichkeit der Kreise. Die Apollonischen Aufgaben mit der gewöhnlichen und der Steinerschen Lösung. — Arithmetik. 2 St. Die arithmetischen und geometrischen Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Eingekleidete Gleichungen; Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten.

Mathematische Aufgaben für die Abiturienten.

1. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die Seitensumme, eine Seite und der Radius des an eine andere Seite anbeschriebenen äußeren Berührungskreises gegeben ist.

2. Ein Dreieck zu berechnen, in welchem die Höhe, die Grundlinie und ein Winkel an der Grundlinie bekannt ist $h = 635{,}27$ m, $c = 718{,}35$ m, $\sphericalangle \alpha = 62^0\ 15'\ 25''$.

3. Addiert man zum Zähler des bei einer gemischten Zahl stehenden Bruches 4, so erhält man $6^1/_3$, subtrahiert man vom Nenner 6, so erhält man $7^2/_3$; addiert man aber zum Zähler 2, während man vom Nenner 3 subtrahiert, so erhält man $6^2/_3$. Wie heißt die gemischte Zahl?

4.
$$5x^2 - 6xy + 7y^2 = 93$$
$$7x^2 - 8xy + 10y^2 = 135.$$

IIb. Geometrie. 3 St. Planimetrie. Von den Transversalen des Dreiecks und dem Neunpunktekreise. Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie — Trigonometrie. — Arithmetik. 2 St. Wurzelsätze; Potenzen mit allgemeinen Exponenten. Logarithmen. Eingekleidete Gleichungen.

9. Physik. 3 St. in IIa und IIb. Nach Jochmanns Grundriß der Experimentalphysik.

IIa. Oberlehrer Meißner. Magnetismus. Galvanismus. Einiges aus der Wärmelehre. — Wichtigstes aus der mathematischen Geographie.

IIb. Schulz. Allgemeine Eigenschaften der Körper; Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper. Reibungselektricität.

10. Chemie. 2 St. in IIa. Nach Jochmann. Oberlehrer Meißner. Einführung in das Verständnis der chemischen Prozesse und Formeln. Die wichtigsten Eigenschaften und Verbindungen der Metalloide und der leichten Metalle.

11. Naturbeschreibung. IIb. 2 St. Nach Schillings Schulnaturgeschichte. Bosse. Im Sommer Botanik. Die Akotyledonen und ihre Fortpflanzung. Gewebelehre. Lebenslehre der Pflanzen. Einiges aus der Pflanzengeographie. Wiederholungen. Im Winter Anthropologie 1 St. Bewegungs-, Sinn- und Ernährungsorgane. Die entsprechenden Organe der verschiedenen Tierklassen sind zur Vergleichung herangezogen. — Einiges aus der Diätetik. — Wiederholungen aus Zoologie und Mineralogie 1 St.

12. Zeichnen. 2 St. Dumont. Landschaften, Blumen, Ornamente verschiedener Stilarten, Tiere und Köpfe nach Handzeichnungen berühmter Meister. — Perspektive und Projektion.

13. Gesang.
14. Turnen. } Siehe unten.

Tertia.

Ordinarius: Saltzmann.

(Getrennter Unterricht in Ober- und Untertertia (IIIa und IIIb) für Englisch und Mathematik.)

1. Religion. 2 St. Kawolewsky. Wiederholung der drei ersten Hauptstücke, Erlernung des vierten und fünften nebst Sprüchen Das Kirchenjahr. Die Bücher des A. und N. T. und Einleitung zum N. T., besonders zu den Evangelien und der Apostelgeschichte. Lektüre des Evangeliums nach Matthäus und der Apostelgeschichte. — Drei Kirchenlieder, Wiederholung der früher gelernten.

2. Deutsch. 3. St. Saltzmann. Lektüre nach Hopf und Paulsiek II, 1. Disponierübungen. Erlernung von Gedichten. Wiederholungen aus der Formenlehre. Satzzeichnung. Metrische Vorbegriffe. — Alle drei Wochen ein Aufsatz.

3. Latein. 6. St. Nach Fromms kleiner Grammatik und Übungsbuch I. Kawolewsky. Wiederholungen aus der Formenlehre. Kasuslehre. Participialkonstruktion. Gebrauch der tempora; consecutio temporum und Hauptsachen über die oratio obliqua. Erlernung von Musterbeispielen. Exercitien und Extemporalien wöchentlich abwechselnd. — Lektüre aus Lattmanns erweitertem Cornelius Nepos und Caesar de bello Gall. I, 30—54.

4. Französisch. 4 St. Nach Plötz' Schulgrammatik. Saltzmann. Lektion 1—28: Unregelmäßige Verben. Anwendung von avoir und être. Reflexive und unpersönliche Verben. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. — Lektüre aus den ersten Abschnitten von Plötz' Chrestomathie.

5. Englisch. 4 St. in IIIa und IIIb. Nach Deutschbein.

IIIa. Saltzmann. Lektion 40—67. Wöchentlich eine Arbeit. — Lektüre aus Tales of a Grandfather von W. Scott.

IIIb. Schulz. Lektion 1—40, das heißt bis zur Erlernung der regelmäßigen Konjugation. Wöchentlich Exercitien und Extemporalien. — Zur Lektüre dienten die Lesestücke aus dem Anhang. Erlernung kleiner Gedichte.

6. Geschichte. 2 St. Nach Heinel-Krosta. Kawolewsky. Deutsche Geschichte von dem ersten Auftreten der Germanen bis 1519, und die älteste preußisch-brandenburgische bis 1618. Wiederholungen aus der alten Geschichte nach dem Kanon.

7. Geographie. 2 St. Nach Stahlberg III. Kursus. Kawolewsky. Das Notwendigste aus der mathematischen Geographie und die Länder Ost-, Süd- und Nordeuropas. — Kartenskizzen.

8. Mathematik. 5 St. in IIIa und IIIb. Nach Mehler.

IIIa. Oberlehrer Meißner. Geometrie 2 St. Planimetrie. Von der Proportionalität der Strecken und von der Ähnlichkeit der Figuren. Von den regelmäßigen Polygonen und der Ausmessung des Kreises. — Arithmetik 3 St. Von den Potenzen und der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel. Allgemeine Reduktionen. Gleichungen des ersten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten, des zweiten Grades mit einer Unbekannten.

IIIb. Schulz. Geometrie 2 St. Kreislehre und Gleichheit der Figuren mit zahlreichen Konstruktionsaufgaben; Verwandlung und Teilung der Figuren. — Arithmetik 2 St. Die vier Species in allgemeinen Zahlen mit einfachen und zusammengesetzten Ausdrücken; Zerfällen von Summen in Faktoren; Addition von Brüchen; einfache Reduktionen und die Hauptsätze der Potenzrechnung. — Praktisches Rechnen 1 St. Verhältnis- und Procentbestimmungen; Wiederholung der Zinsrechnung; Gewinn- und Verlustrechnung; Rabatt-, Gesellschafts- und Mischungsrechnung.

Vierzehntägige mathematische Arbeiten.

9. Naturbeschreibung 2 St. Nach Schilling. Bosse. Im Sommer Botanik. Durchnahme der Pflanzen im Anschluß an das natürliche System Endlichers mit Ausnahme der Akotyledonen. Wiederholungen aus dem Stoffe für Quarta. Im Winter Zoologie. Fische, Gliedertiere, Weichtiere, Stachelhäuter, Pflanzentiere, Urtiere.

10. Zeichnen 2 St. Dumont. Ornamente, Pflanzenformen, Blumen, Landschaften, Geräte und Gefäße, Tier- und Fischfiguren in Kontur und schattiert. Mäander, Rand- und Eckverzierungen, Durchschiebungen und Flachornamente, gotisches Maßwerk mit Lineal und Zirkel nach Vorzeichnung des Lehrers an der Wandtafel.

11. Gesang. } Siehe unten.
12. Turnen. }

Quarta.

Ordinarius: Schulz.

1. Religion. 2 St. Kawolewsky. Wiederholung des ersten und zweiten Hauptstücks, Erlernung des dritten mit Sprüchen. Die Bücher des A. T. Lektüre aus den historischen Büchern desselben. Geographie von Palästina. Rückblicke auf die Festgeschichte. — Vier Kirchenlieder, Wiederholung der früher gelernten.

2. Deutsch. 3 St. Hopf und Paulsieks Lesebuch I, 3. Bosse. Lesen von Prosastücken und Gedichten und Erlernung der für diese Klasse vorgeschriebenen. — Wort- und Satzlehre wiederholt, erweitert und beendigt. Wort- und Satzbestimmung. — Alle drei Wochen wurde ein Aufsatz, alle vier Wochen ein Diktat gefertigt.

3. Latein. 7 St. Nach Fromms kleiner Grammatik, desselben Übungsbuch I und Ostermanns II. Kawolewsky. Wiederholung der Formenlehre, Hauptregeln der Kasuslehre, acc. c. inf., abl. absol. Musterbeispiele dazu und Vokabeln nach Ostermanns Vokabularium II gelernt. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. — Lektüre zunächst aus Ostermanns Lesestücken; dann aus Lattmanns erweitertem Cornel. Nepos, Miltiades.

4. Französisch. 5 St. Nach Plötz' Elementarbuch. Schulz. Lektion 60—91: Regelmäßige Konjugation, die Fürwörter, reflexive Verben, Veränderlichkeit des Participe passé, die

gebräuchlichsten unregelmäßigen Verben. — Lektüre aus den Lesestücken des Anhanges; Erlernung einiger kleiner Gedichte und Fabeln. — Exercitien und Extemporalien abwechselnd.

5. Geschichte. 2 St. Nach Dielitz. Umlauff. Griechische Geschichte bis zur Teilung der macedonischen Monarchie. Römische Geschichte bis zum Aussterben des julischen Hauses; aus der folgenden Zeit ausgewählte Abschnitte bis auf Aurelian. Repetitionen nach dem Kanon.

6. Geographie. 2 St. Nach Stahlberg III. Kursus. Oberlehrer Meißner. Die außereuropäischen Erdteile.

7. Mathematik. 5 St. Schulz. Geometrie 3 St. nach Mehler. Einleitung. Sätze über die Parallelen, Dreiecke und Parallelogramme mit vielen Konstruktionsaufgaben. Analysis, Konstruktion, Beweis, Determination. — Rechnen 2 St. Erweiterung der Decimalbruchrechnung; abgekürzte Multiplikation und Division. Zusammengesetzte Regel de tri, Zinsrechnung, vermischte Aufgaben. — Vierzehntägige Arbeiten.

8. Naturbeschreibung. 2 St. Nach Schilling. Bosse. Im Sommer Botanik. Durchnahme der Pflanzen im Anschluß an das Linnésche System. Gestaltungslehre. — Im Winter Zoologie. Säugetiere; Vögel; Reptilien und Amphibien.

9. Zeichnen. 2 St. Dumont. Blatt- und Blütenformen. Rosetten- und Spiralenkombinationen, Motive zu Pflanzenbildungen und zu vegetativer Ornamentation; stilisierte Blumen. — Musterzeichnen mit Lineal und Zirkel.

10. Gesang.
11. Turnen. } Siehe unten.

Quinta.

Ordinarius: Umlauff.

1. Religion. 2 St. Nach Brüggemanns Heilsgeschichte. Bosse. Geschichten des N. T. Das zweite Hauptstück nebst Liederversen und Sprüchen. Wiederholung des Stoffs für Sexta. Vier Kirchenlieder.

2. Deutsch. 3 St. Hopf und Paulsieks Lesebuch I, 2. Bosse. Lesen von Prosastücken und Gedichten und Erlernung der für diese Klasse vorgeschriebenen Gedichte. — Erweiterung und Beendigung der Wortlehre. Der ausgebildete und zusammengezogene Satz. Wort- und Satzbestimmung, Interpunktion. — Diktate und kleine Aufsätze wöchentlich wechselnd.

3. Latein. 7 St. Nach Fromms Grammatik, Ostermanns Übungsbüchern und Vokabularium. Umlauff. Wiederholung und Erweiterung des Pensums von Sexta. Unregelmäßige Verben, verba anomala, Adverbien und Präpositionen. Konstruktion der Städtenamen und andere wichtige Sätze der Syntax, namentlich vom acc. c. inf. und abl. absol. Regelmäßiges Vokabellernen. — Exercitien und Extemporalien wöchentlich abwechselnd.

4. Französisch. 5 St. Nach Plötz' Elementarbuch. Saltzmann. Lektion 1—60. Die vier regelmäßigen Konjugationen. Wöchentlich eine Arbeit.

5. Geschichte. 1 St. Umlauff. Griechische Sagen bis auf die Perserkriege; im Anschluß daran Sagengeschichte der Urvölker des Orients. — Römische Königsgeschichte.

6. Geographie. 2 St. Nach Stahlberg II. Kursus. Umlauff. Elemente der mathematischen Geographie. Europa, namentlich Deutschland.

7. Rechnen. 4 St. Hentschel, Aufgaben zum Zifferrechnen II, 1. Dumont. Bruch-

rechnung und ihre Anwendung in der einfachen Regel de tri. Decimalbruchrechnung. Schriftliche Arbeiten alle 14 Tage. Teilen, Messen und Berechnen von Winkeln und Flächengrößen. Konstruktionen durch Aneinanderfügen gegebener Elemente mit Lineal und Reißfeder.

8. Naturbeschreibung. 2 St. Nach Schilling. Bosse. Im Sommer Botanik. Phanerogamen, in vergleichender Weise behandelt, mit besonderer Hervorhebung der charakteristischen Merkmale der Familien. — Im Winter Zoologie. Vertreter sämtlicher Ordnungen der Säugetiere, Vögel, Reptilien, Amphibien und Fische.

9. Schreiben. 2 St. Dumont. Nach ein- und mehrzeiligen Vorschriften in doppelzeiligen und einzeiligen Heften.

10. Zeichnen. 2 St. Dumont. Dreieck, Sechseck, Achteck mit verschiedenen Kombinations- und Schraffierübungen. Bandverschlingungen. Regelmäßige Bogen zur Blattform entwickelt. Rosetten im Schema des Sechs- und Achtecks. Bogenlinige Zierfiguren.

11. Gesang. }
12. Turnen. } Siehe unten.

Sexta.

Ordinarius: Bosse.

1. Religion. 3 St. Nach Brüggemanns Heilgeschichte. Bosse. Geschichten des A. T. nebst Liederversen und Sprüchen. Die Festgeschichten des N. T. sind gelesen und erklärt. — Das erste Hauptstück mit Luthers Erklärung, das dritte ohne solche. Sechs Kirchenlieder.

2. Deutsch. 3 St. Hopf und Paulsieks Lesebuch I, 1. Bosse. Prosa und Gedichte; Erlernung der im Kanon für Sexta bestimmten. — Wortlehre. Wortbestimmung. Der reine einfache Satz. — Jede Woche ein Diktat, ab und zu auch ein kleiner Aufsatz.

3. Latein. 8 St. Nach Ostermanns Übungsbuch und Vokabularium I. Fromms kleine Grammatik. Umlauff. Die regelmäßigen Deklinationen mit den Hauptgenusregeln; Adjektiv, Zahlwort, Fürwort; die vier regelmäßigen Konjugationen. Tägliches Vokabellernen. Wöchentlich schriftliche Arbeiten.

4. Geschichte. 1 St. Umlauff. Griechische Sagen bis zum trojanischen Kriege einschließlich.

5. Geographie. 2 St. Nach Stahlberg I. Kursus. Bosse. Geographische Vorbegriffe. Die wichtigsten und einfachsten Lehren der mathematischen Geographie. Weltteile und Weltmeere. Länder Europas, mit besonderer Berücksichtigung Deutschlands und des preußischen Staates.

6. Rechnen. 5 St. Nach Hentschel I, 1 und 2. Dumont. Die vier Species mit unbenannten und benannten Zahlen, nebst Anwendung von Decimalbrüchen. Anfänge der Bruchrechnung. Schriftliche Arbeiten alle 14 Tage.

7. Naturbeschreibung. 2 St. Bosse. Im Sommer Botanik. Beschreibung von Pflanzen mit deutlichen Zwitterblüten nach lebenden Vorlagen. — Im Winter Zoologie. Beschreibung von Wirbeltieren.

8. Schreiben. 2 St. Dumont. Deutsche und lateinische Schrift in Heften mit Doppel- und Richtungslinien nach Vorschrift des Lehrers an der Wandtafel.

9. Zeichnen. 2 St. Dumont. Die gerade Linie; Richtung und Teilung derselben.

Winkel und Winkelarten, Zickzack- und Mäanderzüge. Quadrat und Quadratfiguren. Motive zu Randfiguren.

10. Gesang. } Siehe unten.
11. Turnen. }

Von der Teilnahme am Religionsunterrichte der evangelischen Konfession ist kein Schüler dispensiert worden. Katholiken und Dissidenten besuchten die Anstalt nicht. Zwei jüdische Schüler nahmen auf Wunsch ihres Vaters und mit Genehmigung des Königlichen Provinzialschulkollegiums am Schulreligionsunterrichte teil.

Technischer Unterricht.

a. Im Turnen wurden während des Sommers nicht einzelne Abteilungen der Schüler, sondern die Gesamtzahl nach Riegen zweimal in der Woche zu je zwei Stunden unterrichtet; dispensiert waren zwei Schüler. — Im Winter konnte wegen Unheizbarkeit des Lokals der Unterricht nur fakultativ gegeben werden, doch beteiligten sich 50 Knaben an den Übungen. Den Unterricht leitete Bosse.

b. Im Gesange waren zwei Stufen: die obere besteht aus den Klassen Sekunda bis Quarta, die untere aus den Klassen Quinta und Sexta, deren jede in zwei wöchentlichen Stunden unterrichtet wurde. Ab und zu traten zur Ausführung von Doppelchören beide Singklassen zusammen. Den Unterricht leitete Dumont.

c. Im Zeichnen (obligatorisch) Klassenunterricht, dessen Pensa in der vorausgehenden Übersicht verzeichnet sind.

II. Verfügungen der vorgesetzten Behörden.

2. April 1887. Das Königliche Provinzial-Schulkollegium bestätigt den Lehrplan und den Stundenverteilungsplan für das Schuljahr 1887/88;

28. April, übersendet das Verzeichnis der dem Realprogymnasium überwiesenen Inventarienstücke aus der aufgelösten Gewerbeschule zu Königsberg, mit dem Auftrage, die Gegenstände abholen zu lassen und zu inventarisieren;

15. Mai, notifiziert den Ministerial-Erlaß vom 30. April, demzufolge kein zu einem Turn-, Taubstummen- und Zeichenlehrerkursus zugelassener Lehrer ohne specielle Genehmigung des Herrn Ministers während der Dauer des Kursus aus seinem Amte entlassen werden darf;

12. Juni, erfordert Bericht darüber, ob und welche vorgeschichtliche Altertümer bei der Anstalt vorhanden sind, und mahnt zu sorgfältiger Erhaltung derselben;

20. Juli, verfügt zufolge Ministerial-Erlasses vom 4. Juli, daß jährlich zum 1. Dezember darüber berichtet werde, ob mit der Anstalt Kunstsammlungen verbunden sind, was sie enthalten und wie sie ergänzt sind;

20. Juli, übersendet im Auftrage des Herrn Ministers für die Schulbibliothek ein Exemplar des Buches von Dr. W. Zenker: „Sichtbarkeit und Verlauf der totalen Sonnenfinsternis in Deutschland am 19. August 1887", als Leitfaden zur Belehrung der Schüler;

19. Oktober, (Provinzial-Schulkollegium zu Danzig) fordert zur Einsendung zweier Beratungsgegenstände für die 1889 in Danzig abzuhaltende Direktorenkonferenz der höheren Lehranstalten Ost- und Westpreußens auf;

5. Januar 1888, genehmigt die Abhaltung der Ostern-Abiturientenprüfung;

9. Januar, übermittelt die Ferienordnung für 1888/89.

III. Chronik der Schule.

Das abgelaufene Schuljahr begann am 18. April und verlief ohne Störung bis zu den Sommerferien. Während derselben war Lehrer Saltzmann als Reservelieutenant zu achtwöchentlicher Dienstleistung einberufen, der er bis zum 10. September nachzukommen hatte. Vom 1. August, dem Schulanfang nach den Ferien, wurde er durch den Schulamtskandidaten Dr. Heinrich Pfuhl in allen seinen Unterrichtsgegenständen vertreten. Sonstige Unterbrechungen kamen nur in geringer Zahl vor, da glücklicherweise der Gesundheitszustand unter dem Lehrerpersonal vortrefflich war und die militärpflichtigen Lehrer wegen Wahrnehmung der Kontrollversammlungen nur einige Stunden zu versäumen genötigt waren; wegen dringender Angelegenheiten wurde nur zweimal ein kurzer Urlaub erteilt.

Behufs Beobachtung der Sonnenfinsternis am 19. August war es mit höherer Genehmigung den Lehrern anheimgegeben, auch bei Aussetzung einiger Unterrichtsstunden, eine Gelegenheit zu benutzen, um in die Zone der Totalität zu gelangen. Die Mehrzahl der Lehrer machte von derselben Gebrauch, und auch den Schülern, die sich dazu meldeten, wurde der Urlaub nicht verweigert. Sie kehrten während des Vormittags zurück, aber leider, wie unzählige andere, völlig erfolglos.

Unter den Schulfestlichkeiten sind folgende anzuführen: Am 27. Juni unternahmen die Schüler in Begleitung ihrer Lehrer und deren Familien, sowie einiger Freunde der Anstalt, mit dem Dampfer Rapp, welchen der Reeder Herr Reimer auch dieses Jahr wieder mit zuvorkommender Bereitwilligkeit zur Verfügung gestellt hatte, einen Ausflug nach dem am Haff gelegenen Flecken Brandenburg, von wo sie weiter einen mehrstündigen Marsch nach der Eisenbahnstation Ludwigsort und wieder zurück machten. Nach 10 Uhr kehrten sie heim; um 1 Uhr mittags hatten sie sich eingeschifft. — Der Sedantag am 2. September wurde bei dem Morgengebet nach seiner hohen Bedeutung den Schülern in Erinnerung gebracht, und ihnen der Nachmittag frei gegeben, um ihnen die Teilnahme an einem von der hiesigen Schützengilde veranstalteten Volksfeste zu ermöglichen. — Am 26. September fand das jährliche Turnfest mit Preisverteilung statt. — Am 10. März wurde infolge des Ablebens Sr. Majestät des Kaisers und Königs mit dem Morgengebet eine angemessene Trauerfeierlichkeit verbunden. — Am 22. März Gedenkfeier für Seine hochselige Majestät Kaiser Wilhelm.

Die mündliche Abiturientenprüfung wurde unter dem Vorsitz des Herrn Provinzialschulrat Trosien am 12. März abgehalten. — Die Ferien sind der durch das Königliche Provinzial-Schulkollegium veröffentlichten Ferienordnung gemäß gelegt worden. Außer den gesetzlich schulfreien und den durch die Schulfestlichkeiten in Anspruch genommenen halben Tagen durfte der Unterricht nur am Nachmittage des 1. August wegen zu großer Hitze sistiert werden.

Der Gesundheitszustand der Schüler war im allgemeinen befriedigend. — Die Wiederimpfung der im zwölften Lebensjahre stehenden Knaben erfolgte im Beisein des Rektors am 21. Juni, die Feststellung des Erfolges am 27. Juni.

IV. Statistische Mitteilungen.

1. Frequenzliste für das Schuljahr 1887/88.

	Realprogymnasium.							
	O. II.	U. II.	O. III.	U. III.	IV.	V.	VI.	Summa.
1. Bestand am 1. Februar 1887	4	7	3	16	10	13	15	68
2. Abgang bis zum Schluß des Schuljahrs 1886/87	4	1	—	4	1	—	2	12
3a. Zugang durch Versetzung zu Ostern	6	3	11	4	9	9	—	42
3b. Zugang durch Aufnahme zu Ostern	—	—	—	—	—	1	14	15
4. Frequenz am Anfange des Schuljahrs 1887/88	6	3	11	5	14	14	18	71
5. Zugang im Sommersemester	—	1	—	—	—	—	3	4
6. Abgang „ „	—	—	1	2	1	1	1	6
7a. Zugang durch Versetzung zu Michaelis	—	—	—	—	—	—	—	—
7b. „ „ Aufnahme „ „	—	—	—	—	—	—	1	1
8. Frequenz zu Anfang des Wintersemesters	6	4	10	3	13	13	21	70
9. Zugang im Wintersemester	—	—	—	—	—	—	—	—
10. Abgang im Wintersemester	—	—	—	—	—	—	2	2
11. Frequenz am 1. Februar 1888	6	4	10	3	13	13	19	68
12. Durchschnittsalter am 1. Februar 1888	17,3	16,5	14,9	13	12,9	11,9	10,5	—

2. Religions- und Heimatsverhältnisse der Schüler.

	Realprogymnasium.						
	Evang.	Kath.	Diss.	Juden.	Einh.	Ausw.	Ausl.
1. Am Anfang des Sommersemesters	69	—	—	2	55	15	1
2. „ „ „ Wintersemesters	68	—	—	2	52	17	1
3. Am 1. Februar 1888	66	—	—	2	52	15	1

Das Zeugnis für den einjährigen Militärdienst haben erhalten Ostern 1887: 6 Schüler, von denen keiner zu einem praktischen Beruf abgegangen ist.

3. Übersicht der Abiturienten.

Termin.	Namen.	Geburtstag.	Geburtsort.	Konfession.	Stand und Wohnort des Vaters.	Aufenthalt in der Schule.	Aufenthalt auf Sekunda.	Gewählter Beruf.
Ostern 1888.	1. Eduard Senst.	28. März 1872.	Neuwied.	evang.	Hauptzollamtsrendant in Pillau.	6½	2	besuchen die Prima eines Realgymnasiums.
	2. Karl Toop.	1. Novbr. 1871.	Pillau.	evang.	Kgl. Seelotse in Pillau.	9	2	besuchen die Prima eines Realgymnasiums.
	3. Max Köthner.	20. Juli 1870.	Stralsund.	evang.	Hafenpolzeidirektor in Pillau.	9	2	Kaiserlicher Marinedienst.

V. Sammlung von Lehrmitteln.

1. Die Lehrerbibliothek ist aus den etatsmäßigen Mitteln durch folgende Werke vermehrt: Jahrgang 1887 nachbenannter Zeitschriften: Centralblatt für das gesamte Unterrichtswesen, Volksschulfreund, Altpreußische Monatsschrift, Pädagogisches Archiv, Deutsche Schulgesetzsammlung, Rheinische Blätter, Centralorgan für die Interessen des Realschulwesens, Aus allen Weltteilen, Petermanns Mitteilungen, Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Zeitschrift des Vereins deutscher Zeichenlehrer, Monatsschrift für das Turnwesen, Herrigs Archiv für das Studium der neuern Sprachen; Mushacke, Statistisches Jahrbuch der höheren Schulen; Ordnung der Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen vom 5. Februar 1887; Bandow, Readings from Shakespeare; Wazel, Cäsars Gallischer Krieg, 2 Bde.; Wossidlo, Lehrbuch der Botanik für höhere Lehranstalten; Unbescheid, Beitrag zur Behandlung der dramatischen Lektüre; Scheler, Dictionnaire d'Etymologie française.

Als Geschenke erhielt die Anstalt für diese Bibliothek: Vom Herrn Minister durch das Königliche Provinzial-Schulkollegium: Zenker, Sichtbarkeit und Verlauf der totalen Sonnenfinsternis in Deutschland am 19. August 1887; vom Gymnasium zu Lyck: Festschrift zum 300jährigen Jubiläum desselben am 28., 29. und 30. Juni 1887, 2 Hefte; vom Rektor: Heim, Geschichte der Kriege in Algier; W. Zimmermann, die Befreiungskämpfe der Deutschen gegen Napoleon; Bibliothèque de Campagne, 24 tomes, Genève 1761; von Winters Universitätsbuchhandlung zu Heidelberg: Dittmar, deutsche Geschichte bis zum westphälischen Frieden; brandenburgisch-preußische Geschichte seit 1648; Leitfaden der Weltgeschichte; von der Nicolaischen Verlagsbuchhandlung in Berlin: Kern, Leitfaden für den Anfangsunterricht in der deutschen Grammatik, nebst Begleitwort; von der Buchhandlung Wagner & Debes: Perthes, Atlaseinheit in den einzelnen Klassen. Weiteres s. unten.

(Die durch Ministerial-Erlaß angeordnete Revision der Lehrerbibliothek fand am 22. Februar statt.)

2. Für die Schülerbibliothek wurden aus den Monatsbeiträgen der Schüler unter Zustimmung der Lehrerkonferenz angeschafft: Lohmeyers Deutsche Jugend, Band 4 und 5, Buch der Jugend; Zastrow, Deutsche in Nordamerika; Schmidt, Reineke Fuchs; die junge Griechin;

Pflug, Geschichtsbilder I. und II.; Barek, Richard Löwenherz; Schmelzer, Erzählungen aus dem Altertum; Meißner, Cook; Hoffmann, Prinz Eugen; Weitbrecht, Deutsches Heldenbuch; Volz, Charakterbilder; Pichler, Diadem und Myrten. Geschenk der Petersschen Buchhandlung zu Leipzig: Hermann und Dorothea. Weiteres s. unten.

3. Dem physikalischen Kabinett hat Herr Oberlehrer Meißner ein Demonstrationsbarometer eigener Erfindung und eigener Arbeit hinzugefügt.

Eine besondere Erweiterung haben die Sammlungen erfahren, indem durch die Fürsorge des Königlichen Provinzial-Schulkollegiums der Anstalt eine große Zahl von Inventarienstücken der aufgelösten Gewerbeschule zu Königsberg überwiesen worden ist. Ohne die Gegenstände einzeln aufzuzählen, sei so viel bemerkt, daß der Lehrerbibliothek 24 Werke, der Kartensammlung 12 ältere Wandkarten, den Zeichenvorlagen 7 Werke mit einer großen Zahl von Vorlegeblättern und Skizzen, besonders für Maschinenbauer und sonstige Bauhandwerker, dem physikalischen Apparat 25, der Schülerlesebibliothek 26 neue Nummern einverleibt werden konnten. — Auch begleitete die Sendung eine recht brauchbare alte holländische Wanduhr. —

VI. Stiftungen und Unterstützungen von Schülern.

Bedürftige Schüler konnten auch in diesem Jahre aus dem schon früher angelegten Büchervorrat und einem kleinen disponibeln Unterstützungsfonds mit Schulbüchern versehen werden.

Der Annahme des durch die im Programm 1887 namhaft gemachte Zander-Stiftung der Anstalt zugewendeten Kapitals hat das Königliche Provinzial-Schulkollegium seine Zustimmung erteilt, und der hiesige Magistrat hat dem Ersuchen des Stifters, die Verwaltung des Fonds zu übernehmen, bereitwilligst stattgegeben. — Der Stiftungsurkunde gemäß soll die Stiftung vom 1. April d. J., mit welchem Tage der unterzeichnete Rektor aus seinem Amte scheidet, in Kraft treten.

VII. Mitteilungen an die Schüler und deren Eltern.

Ordnung der Prüfung.

Vormittags 9 Uhr.

Sexta: Religion. Herr Bosse.
Rechnen. Herr Dumont.
Quinta: Geographie. Herr Umlauff.
Deutsch. Herr Bosse.
Quarta: Französisch. Herr Schulz.
Naturbeschreibung. Herr Bosse.
Gesang der oberen Singklasse. Herr Dumont.

Nachmittags 3 Uhr.

Tertia: Latein. Herr Kawolewsky.
Englisch. Herr Saltzmann.
Sekunda: Mathematik. Herr Oberlehrer Meißner.
Geschichte. Herr Umlauff.

Abschiedsworte des Abiturienten Eduard Senst.
Erwiderung des Sekundaners Otto Linke.

Entlassung der Abiturienten und Schlußrede des Rektors.

Choral.

Mittwoch, den 28. März werden den Schülern die Zeugnisse ausgeteilt und die Versetzungen bekannt gemacht werden.

Die Aufnahme neuer Schüler findet am Dienstag, den 10., und Mittwoch, den 11. April, vormittags von 9 bis 12 Uhr, im Konferenzzimmer der Anstalt statt. Der Impf- bezügl. Wiederimpfungsschein, das Tauf- bezügl. Geburtsattest, sowie das Abgangszeugnis der etwa vorher besuchten Schule und einige Hefte aus der letzten Zeit sind vorzulegen. — Die zur Stadtschulkasse fließende Einschreibegebühr beträgt 3 Mark, das Schulgeld 7,50 Mark monatlich pränumerando; Turngeld wird nicht besonders gezahlt.

Das neue Schuljahr beginnt am Donnerstag, den 12. April, um 7 Uhr morgens.

A. Zander.